MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN BIHOR

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 16. 02. 2019

Clasa a V – a

1. FELADAT Egy osztályban 35 tanuló van. A fiúk száma 2-vel nagyobb a lányok számának felénél. Igazold, hogy az osztályban van legalább négy lány, aki a hétnek ugyanazon a napján született és van legalább két fiú, aki ugyanabban a hónapban született.

2. FELADAT

1) Az $\overline{abc}$ természetes szám számjegyeinek összege 25. Számítsátok ki az $\overline{abc}+1$ szám számjegyeinek összegét.
2) Jelöljük $S(m)$-mel az m természetes szám számjegyeinek összegét. Igazoljátok, hogy létezik egy n természetes szám úgy, hogy $S(n)-S(n+1)=2069$.

3. FELADAT

1) Írjátok fel a 2019^{2019} számot 2019 egymás után következő természetes szám összegeként.
2) Írjátok fel a 2019^{2019} számot négy, nullától különböző négyzetszám összegeként.

4. FELADAT Leírunk növekvő sorrendbe minden olyan különböző számjegyekből álló négyjegyű természetes számot, melyben a számjegyek összege 12. Határozzátok meg, hogy ebben a sorban hányadik helyen van a 2019.

Megjegyzés: Munkaidő 2 óra.
Minden feladat kötelező.
Minden feladatot 0-tól 7-ig pontoznak.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 16. 02. 2019

Clasa a VI – a

1. FELADAT Legyenek a, p és q nullától különböző természetes számok. Ha $ap+1$ osztható q-val és $aq+1$ osztható p-vel, igazoljátok, hogy p és q relatív prím számok és $a \geq \frac{pq-1}{p+q}$.

2. FELADAT Egy matematikaversenyen a tanulók négy feladatot kell megoldjanak. Minden feladatért egy-egy pontot kapnak hivatalból. A hivatalból járó ponton kívül a tanulók még további pontokat szerezhetnek a következő szabály szerint: aki helyesen oldja meg az első feladatot az kap még 3 pontot; aki helyesen oldja meg a második feladatot az kap még 6 pontot; aki helyesen oldja meg a harmadik feladatot az kap még12 pontot; aki helyesen oldja meg a negyedik feladatot az kap még 24 pontot. Hiányos megoldásokért nem járnak részpontok. Mutassátok ki, hogy ha két tanuló azonos pontszámot ér el, akkor a két tanuló ugyanazokat a feladatokat oldotta meg helyesen,

3. FELADAT Egy körre 2019 villanykörte van felszerelve, melyek közül 1010 ég, a többi nem ég. Egy villanykörte állapotváltozása alatt azt értjük, hogy az égő villanykörte kialszik, a nem égő pedig kigyullad, Egy lépés alatt azt értjük, hogy ha megérintünk egy villanykörtét, akkor a megérintett villanykörte két szomszédja állapotot változtat. Gigel azt szeretné elérni, hogy valahány lépés után minden villanykörte egyszerre égjen. Állapítsátok meg, hogy el tudja-e érni a célját. Indokoljátok a választ!

4. FELADAT Adott a $DOE\sphericalangle$ hegyesszög, $OM \perp OD$ és $ON \perp OE$ úgy, hogy $\mathrm{m}(MON\sphericalangle) = 140°$. Határozzátok meg az XOY szög mértékét, ha OX az MOD szög szögfelezője és OY az NOE szög szögfelezője.

Megjegyzés: Munkaidő 2 óra.
Minden feladat kötelező.
Minden feladatot 0-tól 7-ig pontoznak.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 16. 02. 2019

Clasa a VII – a

1. FELADAT Bizonyítsátok be, hogy $\{\sqrt{1}\}+\{\sqrt{3}\}+\{\sqrt{5}\}+...+\{\sqrt{49}\}<18,$ ahol $\{x\}$ az x szám tört része.

2. FELADAT Határozzátok meg azokat az m és n természetes számokat, amelyekre $\frac{4n}{2m+3}=\frac{n-2}{m}.$

3. FELADAT Legyen M és N az $ABCD$ rombusz $[AD]$, illetve $[DC]$ oldalának felezőpontja, $BM\cap AC=\{P\}$, és $BN\cap AC=\{T\}$.

1) Igazoljátok, hogy $MNTP$ egy egyenlőszárú trapéz;
2) Ha $AN\cap BD=\{G\}$ és $GP\perp AB$, bizonyítsátok be, hogy $ABCD$ négyzet.

4. FELADAT Az ABC háromszög oldalain felvesszük az $M\in(BC)$, $N\in(AC)$ és $P\in(AB)$, pontokat, úgy hogy $AM\cap BN\cap CP=\{O\}$. Bizonyítsátok be, hogy $\frac{MO}{MA}+\frac{NO}{NB}+\frac{PO}{PC}=1.$

Megjegyzés: Munkaidő 3 óra.
Minden feladat kötelező.
Minden feladatot 0-tól 7-ig pontoznak.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 16. 02. 2019

Clasa a VIII – a

1. FELADAT Adott az $ABCDA'B'C'D'$ kocka, M a $D'C'$ él felezőpontja és $DT \perp MC,\ T \in MC.$

1) Bizonyítsátok be, hogy $DT \perp (MBC)$;
2) Ha az AD és a BM egyenesek közötti távolság $a\sqrt{5}$, határozzátok meg a kocka élének hosszát.

2. FELADAT

1) Bizonyítsátok be hogy $\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx} \le x+y+z, \quad \forall\, x,y,z>0.$
2) Határozzátok meg az $\sqrt{ab+ac}+\sqrt{ab+bc}+\sqrt{ac+bc}$ kifejezés legnagyobb értékét, ha $a,b,c>0$ és $a+b+c=2019.$

3. FELADAT Gigelt meglátogatja 28 osztálytársa. Gigelnek van egy $ABCDA'B'C'D'$ téglatest alakú csokoládéja, melynek méretei $AB=5$ cm, $BC=3$ cm és $AA'=4$ cm. A csokoládét szeretné megosztani osztálytársaival és a testvérével, úgy hogy mindenki egy téglatest alakú csokoládé darabot kapjon, melynek méretei 1 cm, 1 cm és 2 cm. Mivel a testvére siet, és előre megeszi az adagját, nem tartja be a Gigel által megszabott szabályokat. Ha tudjuk hogy a kistestvér két 1 cm élű csokikockát fogyaszt el, az egyiknek egy csúcsa A-ban és a másiknak egy csúcsa B-ben volt, döntsétek el, hogy Gigel szétoszthatja-e a maradék csokoládét az általa eredetileg megszabott szabály szerint.

4. FELADAT

1) Bizonyítsátok be, hogy egy teljes négyzet *3*-mal való osztási maradéka nem lehet 2.
2) Legyen $a=\sqrt{p^2+q^2+r^2+11} \in \mathbb{Q}$, ahol p,q és r prím számok, és $p<q<r.$ Mutassátok ki, hogy $p=2,$ majd határozzátok meg a q és r számokat.

Megjegyzés: Munkaidő 3 óra.
Minden feladat kötelező.
Minden feladatot 0-tól 7-ig pontoznak.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 16. 02. 2019

Clasa a IX – a

1. FELADAT Adottak az $x, y, z > 0$ valós számok, melyekre teljesül az $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=3$ egyenlőség. Igazoljátok a következő egyenlőtlenségeket:

1) $x+y+z \geq 3;$

2) $(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2 \geq 12.$

2.FELADAT Adott az $(a_n)_{n\geq 1}$ számtani haladvány, melynek állandó különbsége r, egy pozitív szám és az első tagja $a_1 \geq \frac{1}{2}.$ Határozzátok meg az egész részét a következő számnak:

$$A=\sqrt{1+\frac{r}{a_1a_2}}+\sqrt{1+\frac{r}{a_2a_3}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{r}{a_na_{n+1}}},\ n\geq 2.$$

3.FELADAT Az ABC háromszög oldalain felvesszük a következő pontokat $A_1 \in (BC)$, $B_1 \in (CA)$ és $C_1 \in (AB)$ úgy, hogy AA_1, BB_1 és CC_1 konkurensek (összefutók). Az $A_1B_1C_1$ háromszög köré írt kör metszi (másodjára) a BC, CA és AB oldalakat, rendre az A_2, B_2 és C_2 pontokban. Mutassátok ki, hogy:

1) $AC_1 \cdot AC_2 = AB_1 \cdot AB_2;$

2) az AA_2, BB_2, CC_2 egyenesek konkurensek (összefutók).

4.FELADAT Az $ABCD$ konvex négyszögben jelöljük G-vel a BCD háromszög súlypontját és H-val az ACD háromszög ortocentrumát (magasságpontját). Bizonyítsátok be, hogy az A, B, G, H pontok, ebben a sorrendben, egy paralelogramma csúcsait jelölik, akkor és csak akkor, ha G az ACD háromszög köré írt kör középpontja.

Megjegyzés: Munkaidő 3 óra.
Minden feladat kötelező.
Minden feladatot 0-tól 7-ig pontoznak.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 16. 02. 2019

Clasa a X – a

1. FELADAT

1) Mutassátok ki, hogy $\frac{3}{2} < \log_2 3 < \frac{5}{3}$.
2) Határozzátok meg az n természetes számot, ha tudjuk, hogy:

$$n < \log_2 3 + \log_3 4 + \log_4 6 + \log_6 8 < n+1.$$

2. FELADAT Határozzátok meg az $a \le 1$ és $b > 0$ valós számokat, ha a

$$\sqrt[3]{a+x} + \sqrt[3]{a-x} = \frac{x^2+b+1}{\sqrt{x^2+b}}$$

egyenletnek vannak valós gyökei.

3. FELADAT Adott a következő függvényhalmaz: $f_\alpha : \mathbb{N} \to \Gamma$, $f_\alpha(n) = \cos n\alpha + i \sin n\alpha$, ahol $\alpha \in \mathbb{R}$ és $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

1) Bizonyítsátok be hogy f_α nem szürjektiv az α egyetlen valós értékére sem.
2) Bizonyítsátok be, hogy bármely $m \in \mathbb{N}^*$, létezik $\alpha \in \mathbb{R}$, úgy hogy az f_α függvény képhalmazának m eleme legyen;
3) Bizonyítsátok be, hogy bármely $\alpha \in \mathbb{R}$ értékére, az f_α függvény vagy injektív vagy periodikus.

4. FELADAT Az ABC háromszög csúcsainak affixumai a, b és c ahol $|a| = |b| = |c| = R$. Az A csúcsból húzott magasság a d affixumú, D pontban metszi a háromszög köré írt kört.

1) Fejezzétek ki d értékét a, b, c függvényében.
2) Adott az $\mathbf{R}_n = \left\{ z_k = R\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i \sin\frac{2k\pi}{n} \right) \middle| 0 \le k \le n-1 \right\}$ halmaz, ahol $n \ge 5$ páratlan, és legyenek a $k, j, l \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ páronként különböző rögzített számok, úgy hogy $a = z_k$, $b = z_j$, $c = z_l$. Lehetséges-e hogy d eleme legyen az $\mathbf{R}_n$ halmaznak? Indokoljátok a választ.

Megjegyzés: Munkaidő 3 óra.
Minden feladat kötelező.
Minden feladatot 0-tól 7-ig pontoznak.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 16. 02. 2019

Clasa a XI – a

1. FELADAT Adottak a következő mátrixok: $A \in M_3(\mathbb{R})$ és $C = A - A^t$.

1) Bizonyítsátok be, hogy $\det(C) = 0$;
2) Ha $\operatorname{tr}(A^2) = \operatorname{tr}(A \cdot A^t)$, mutassátok ki, hogy $C = O_3$.

2. FELADAT Adottak az $A, B \in M_3(\mathbb{R})$ mátrixok és $\varepsilon = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \in \mathbb{C}$. Ha $\det(A + \varepsilon B) \in \mathbb{R}$, akkor mutassátok ki, hogy $\det(A - B) = \det(A) - \det(B)$.

3. FELADAT Adottak az $(a_n)_{n\geq 1}$ és $(b_n)_{n\geq 1}$ sorozatok, ahol $a_1 = 1$ és $a_{n+1} = \dfrac{1 + a_n}{\sqrt{n+1}}$, $n \geq 1$, illetve $b_n = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

1) Bizonyítsátok be, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$;
2) Bizonyítsátok be, hogy $b_n > \sqrt{n},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$;
3) Számítsátok ki: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_n}$.

4. FELADAT Határozzátok meg az $a \in \mathbb{N}$ azon értékeit, melyekre az $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n = \cos\left(\pi\sqrt{n^2 + an + 1}\right)$ sorozat konvergens.

Megjegyzés: Munkaidő 3 óra.
Minden feladat kötelező.
Minden feladatot 0-tól 7-ig pontoznak.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 16. 02. 2019

Clasa a XII – a

1. FELADAT Adott az $f:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln(\sin x)$ függvény, melynek F egy primitív függvénye. Igazoljátok, hogy a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} F(x)$ határérték létezik és véges.

2. FELADAT Adott a $G=(-1,1)$ halmaz és az $x*y=\dfrac{x+y}{1+xy}$ művelet. Igazoljátok, hogy $(G,*)$ egy kommutatív csoport és számítsátok ki az $(x_n)_{n\geq 1}$ sorozat határértékét, ahol $x_n=\underbrace{x*x*...*x}_{n-szer}$, $x\in G$.

3. FELADAT Legyen H_1 és H_2 két zárt (stabil) részhalmaza $\mathbb{C}^*$ -nek a szorzásra nézve, melyeknek $m,$ illetve n eleme van. Ha $(m,n)=1$, akkor igazoljátok, hogy $H_1\cap H_2=\{1\}$.

4. FELADAT Ha az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ egy nem állandó periodikus függvény, melynek nincs főperiódusa, akkor igazoljátok, hogy ennek a függvénynek nincs primitív függvénye és nem integrálható egyetlen $[a,b]\subset\mathbb{R}$ intervallumon sem.

Megjegyzés: Munkaidő 3 óra.
Minden feladat kötelező.
Minden feladatot 0-tól 7-ig pontoznak.