OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală - 25. 02. 2017
BAREM DE CORECTARE - Clasa a V – a

PROBLEMA 1. Aflaţi câtul şi restul împărţirii numărului $N = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 100 + 900$ la 440.

Barem de corectare.

(4p) Scriem, de exemplu,

$$\begin{aligned} N &= (1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 9) \cdot (11 \cdot \ldots \cdot 43) \cdot (45 \cdot \ldots \cdot 100) \cdot 10 \cdot 44 + 2 \cdot 440 + 20 = \\ &= 440 \cdot [(1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 9) \cdot (11 \cdot \ldots \cdot 43) \cdot (45 \cdot \ldots \cdot 100) + 2] + 20 \end{aligned}$$

(2p) Câtul este $(1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 9) \cdot (11 \cdot \ldots \cdot 43) \cdot (45 \cdot \ldots \cdot 100) + 2$ (sau orice altă formă echivalentă)

(1p) Restul este 20

PROBLEMA 2. Demonstraţi că

$$\left(2016^{n+1} + 2017^{n+1} + 2016^n - 2017^n\right) \vdots\ 2016 \cdot 2017,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Barem de corectare. Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, avem:

(3p) $\left(2016^{n+1} + 2016^n\right) = 2016^n \cdot 2017 \vdots\ 2016 \cdot 2017$

(3p) $\left(2017^{n+1} - 2017^n\right) = 2017^n \cdot 2016 \vdots\ 2016 \cdot 2017$

(1p) În concluzie, $\left(2016^{n+1} + 2017^{n+1} + 2016^n - 2017^n\right) \vdots\ 2016 \cdot 2017$

PROBLEMA 3. Determinaţi numerele naturale $\overline{abc}$ şi $\overline{xy}$, pentru care

$$\overline{abc} + \overline{bc} + c = 2^{\overline{xy}} + 57.$$

Barem de corectare.

(2p) Valoarea maximă pentru $\overline{abc}+\overline{bc}+c$ este $999+99+9 = 1107$. Dacă $\overline{xy} \geq 11$, atunci $2^{\overline{xy}}+57 \geq 1107$.

(1p) Avem deci $\overline{xy} = 10$,

(1p) iar egalitatea devine: $\overline{abc} + \overline{bc} + c = 1081$.

(2p) Adunând unităţile, obţinem $3c \in \{1, 11, 21\}$. Singura posibilitate este $c = 7$; rezultă $2 + 2b \in \{8, 18\}$, adică $b = 3$ sau $b = 8$. Dacă $b = 3$, atunci $a = 10$,ceea ce e imposibil, a fiind cifră. Deci $b = 8$ şi $a + 1 = 10 \Rightarrow a = 9$.

(1p) Numerele $\overline{abc} = 987$ şi $\overline{xy} = 10$ verifică relaţia din enunţ: $987 + 87 + 7 = 1081$.

PROBLEMA 4. Pe o masă sunt 9 cartonaşe. Pe fiecare cartonaş este scris unul dintre numerele

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14$$

astfel încât nu există două cartonaşe cu acelaşţi număr. Gigel şi Costel iau fiecare câte 4 dintre cele 9 cartonaşe. Aflaţi ce număr este pe cartonaşul rămas pe masă, ştiind că suma numerelor de pe cartonaşele luate de Gigel, este de 5 ori mai mare decât suma numerelor de pe cartonaşele luate de Costel.

Barem de corectare.

($1p$) Suma tuturor numerelor este $1+2+3+4+5+11+12+13+14=65$.

($2p$) Dacă c este suma numerelor de pe cartonaşele lui Costel, iar x este numărul de pe cartonaşul rămas pe masă, atunci $c+5c+x=65$, adică $6c+x=65$.

($1p$) Valorile posibile pentru x sunt 5 şi 11.

($2p$) Dacă $x=5$, atunci $c=10$; soluţia este: Costel $(1,2,3,4)$, iar Gigel $(11,12,13,14)$.

($1p$) Dacă $x=11$, problema nu are soluţie.

---

[1]Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

[2]Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală - 25. 02. 2017
BAREM DE CORECTARE - Clasa a VI – a

PROBLEMA 1. *a*) Să se aducă la forma ireductibilă fracţia $\frac{1710171}{1320132}$.

b) Fie fracţia ireductibilă $\frac{p}{q}$, unde $p, q \in \mathbb{N}^*$, $p < q$. Demonstraţi că fracţia $1 - \frac{p}{q}$ este de asemenea ireductibilă.

Barem de corectare.

(3*p*) *a*) $\frac{1710171}{1320132} = \frac{171 \cdot 10^4 + 171}{132 \cdot 10^4 + 132} = \frac{171 \cdot (10^4 + 1)}{132 \cdot (10^4 + 1)} = \frac{171}{132} = \frac{57}{44}$;

(2*p*) *b*) Avem $1 - \frac{p}{q} = \frac{q-p}{q}$. Presupunem prin reducere la absurd că există $d \in \mathbb{N}^*$, $d \neq 1$, astfel încât $d = (q - p, q)$.

(2*p*) Din $d \mid (q - p)$ şi $d \mid q$, obţinem $d \mid (q - (q - p))$, adică $d \mid p$. Rezultă că $d \mid q$ şi $d \mid p$, deci fracţia $\frac{p}{q}$ este reductibilă; contradicţie.

PROBLEMA 2. Determinaţi numerele naturale $\overline{abc}$ pentru care $[a, b, c]^3 = \overline{abc}$. S-a notat cu $[a, b, c]$ cel mai mic multiplu comun al numerelor a, b, c.

(G.M. 11/2016)

Barem de corectare.

(2*p*) Din ipoteză, $\overline{abc}$ este cub perfect de trei cifre.

(2*p*) Cuburile perfecte de trei cifre sunt: $5^3 = 125,\ 6^3 = 216,\ 7^3 = 343,\ 8^3 = 512,\ 9^3 = 729$.

(3*p*) Unica soluţie este $\overline{abc} = 216$.

PROBLEMA 3. Andrei a desenat o dreaptă pe care a colorat cu roşu mai mult de două puncte. Apoi a colorat cu albastru câte un punct, între oricare două puncte consecutive colorate anterior. În continuare, a colorat cu galben câte un punct între oricare două puncte consecutive colorate deja. Andrei a continuat procedeul descris, folosind culorile verde şi respectiv, negru.

a) Dacă Andrei a colorat 7 puncte albastre, câte puncte a colorat în total?

b) Andrei a colorat un număr oarecare de puncte cu roşu. Arătaţi că există o singură culoare cu care Andrei a colorat un număr impar de puncte.

Barem de corectare.

(3p) a) 7 puncte albastre se găsesc între 8 puncte roşii; sunt $7+8=15$ puncte; între 15 puncte se găsesc 14 puncte galbene; sunt $15+14=29$ puncte colorate între care vor fi 28 puncte verzi; astfel avem $29+28=57$ puncte colorate; între acestea Andrei desenează 56 de puncte negre. În total vor fi $57+56=113$ puncte.

(4p) b) Daca avem n puncte roşii, vor fi $n-1$ puncte albastre, deci avem $2n-1$ puncte. Astfel vor fi un număr par de puncte din următoarea culoare, adică $2n-2$ puncte galbene. Între aceste $4n-3$ puncte, avem $4n-4$ puncte verzi. Între cele $8n-7$ puncte, avem $8n-8$ puncte negre. Procedeul ne arată că doar n sau $n-1$ este impar.

PROBLEMA 4. Fie A, B, C, D, E şi F şase puncte coliniare (în această ordine) şi un punct O, $O \notin AB$.

a) Dacă $2AC = AB + AD$ şi $2CF = AF + EF$, atunci $(AB) \equiv (DE)$;

b) Dacă $\sphericalangle AOD \equiv \sphericalangle BOE \equiv \sphericalangle COF$, iar $[OC$ şi $[OD$ sunt bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle BOD$, respectiv $\sphericalangle COE$, atunci $5m(\sphericalangle COD) = m(\sphericalangle AOF)$.

Barem de corectare.

(1p) a) Avem: $2AC = AB + AD \Leftrightarrow 2(AB + BC) = AB + AB + BC + CD \Rightarrow BC = CD$;

(2p) $2CF = AF + EF \Leftrightarrow 2(CD + DE + EF) = AB + BC + CD + DE + EF + EF \Rightarrow DE = AB$. Rezultă că $(AB) \equiv (DE)$.

(2p) b) Din $\sphericalangle AOD \equiv \sphericalangle BOE$, rezultă $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle DOE$, iar din $\sphericalangle BOE \equiv \sphericalangle COF$, rezultă că $\sphericalangle BOC \equiv \sphericalangle EOF$.

(2p) Deoarece $[OC$ şi $[OD$ sunt bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle BOD$, respectiv $\sphericalangle COE$, rezultă că $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle BOC \equiv \sphericalangle COD \equiv \sphericalangle DOE \equiv \sphericalangle EOF$.

[1]Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

[2]Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 25. 02. 2017

BAREM DE CORECTARE - Clasa a VII – a

PROBLEMA 1. *a*) Să se rezolve ecuaţia $\frac{x+4}{5}+\frac{x+5}{6}+\ldots+\frac{x+98}{99}+\frac{x+99}{100}=96$;

b) Să se demonstreze că $\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{6}}{5}+\frac{\sqrt{12}}{7}+\ldots+\frac{\sqrt{n(n+1)}}{2n+1}\leq\frac{n}{2},\ n\in\mathbb{N}^*$.

Barem de corectare.

(2*p*) *a*) Ecuaţia se scrie: $\left(\frac{x+4}{5}-1\right)+\left(\frac{x+5}{6}-1\right)+\ldots+\left(\frac{x+98}{99}-1\right)+\left(\frac{x+99}{100}-1\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{100}\right)\cdot(x-1)=0$.

(1*p*) Aşadar, soluţia ecuaţiei este $x=1$.

(4*p*) *b*) Din inegalitatea mediilor, avem:

$$\frac{\sqrt{1\cdot 2}}{3}+\frac{\sqrt{2\cdot 3}}{5}+\frac{\sqrt{3\cdot 4}}{7}+\ldots+\frac{\sqrt{n\cdot(n+1)}}{2n+1}\leq\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2}=\frac{n}{2}$$

PROBLEMA 2. *a*) Fie numerele $x=2+4+6+\ldots+4034$ şi $y=2017\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\ldots\cdot$ $\cdot\left(1-\frac{1}{2018}\right)$. Arătaţi că numărul $a=x-2018\cdot y$ este pătrat perfect;

b) Fie $a,b\in\mathbb{R}$, astfel încât $a+b=3\sqrt{2}-10$. Demonstraţi că $\left|a+\sqrt{2}\right|+|b+4|\geq 6-4\sqrt{2}$.

Barem de corectare.

(1*p*) *a*) Deoarece $x=2017\cdot 2018$,

(2*p*) iar $y=\frac{2017}{2018}$,

(1*p*) obţinem $a=2017^2$.

(2*p*) *b*) Deoarece $\left|a+\sqrt{2}\right|+|b+4|\geq\left|a+b+\sqrt{2}+4\right|$,

(1*p*) şi $\left|a+b+\sqrt{2}+4\right|=\left|4\sqrt{2}-6\right|=6-4\sqrt{2}$, se obţine $\left|a+\sqrt{2}\right|+|b+4|\geq 6-4\sqrt{2}$.

PROBLEMA 3. Fie $ABCD$ un trapez cu $AB \parallel CD$, E mijlocul lui (AB), F mijlocul lui (CD) şi $AF \cap DE = \{P\},\ BF \cap CE = \{Q\}$. Să se arate că:

a) $PQ \parallel AB$

b) $PQ = \dfrac{AB \cdot CD}{AB + CD}$

Barem de corectare.

(1*p*) *a*) Din $\Delta APE \sim \Delta FPD$, obţinem că $\dfrac{FP}{PA} = \dfrac{DF}{AE} = \dfrac{2 \cdot DF}{2 \cdot AE} = \dfrac{DC}{AB}$,

(1*p*) iar din $\Delta EQB \sim \Delta CQF$, obţinem că $\dfrac{FQ}{QB} = \dfrac{CF}{BE} = \dfrac{2 \cdot CF}{2 \cdot BE} = \dfrac{DC}{AB}$.

(1*p*) Aşadar, $\dfrac{FP}{PA} = \dfrac{FQ}{QB}$, adică $PQ \parallel AB$.

(1*p*) b) În ΔFAB, avem $\dfrac{PQ}{AB} = \dfrac{FP}{FA} =$

(2*p*) $= \dfrac{FP}{FP + PA} = \dfrac{DF}{DF + AE} = \dfrac{\frac{CD}{2}}{\frac{CD}{2} + \frac{AB}{2}}$

(1*p*) adică, $\dfrac{PQ}{AB} = \dfrac{CD}{CD + AB} \Rightarrow PQ = \dfrac{AB \cdot CD}{AB + CD}$.

PROBLEMA 4. Fie $ABCD$ un paralelogram, $M \in (AB)$, $AM = 2MB$, $DM \cap BC = \{N\}$. Ştiind ca aria triunghiului MNB este egală cu 24 cm^2, calculaţi aria patrulaterului $ANCD$.

Barem de corectare.

(2*p*) Triunghiurile ADM şi BNM sunt asemenea cu raportul de asemănare $\dfrac{1}{2}$; rezultă că $S_{\Delta ADM} = 96\ cm^2$;

(2*p*) Triunghiurile NMB şi NDC sunt asemenea cu raportul de asemănare $\dfrac{1}{3}$; rezultă că $S_{\Delta NDC} = 216\ cm^2$;

(2*p*) Din $\dfrac{AM}{MB} = 2$, avem $S_{\Delta AMN} = 2 \cdot S_{\Delta MBN} = 48\ cm^2$.

(1*p*) Deci, $S_{ANCD} = 48 + 216 + 96 = 360\ cm^2$.

[1]Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

[2]Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 25. 02. 2017

BAREM DE CORECTARE - Clasa a VIII – a

PROBLEMA 1. Arătaţi că:

a) $\dfrac{1}{n^2} < \dfrac{1}{n(n-1)}$, pentru orice număr natural n, $n \geq 2$;

b) $\dfrac{3}{28} + \dfrac{3}{63} + \dfrac{3}{112} + \ldots + \dfrac{3}{7 \cdot 2017^2} < \dfrac{1}{2}$.

Barem de corectare.

$(2p)$ *a)* Deoarece $n > n-1$, avem $n^2 > n(n-1)$, de unde rezultă concluzia.

$(1p)$ *b)* Suma din membrul stâng se scrie

$$\frac{3}{7 \cdot 2^2} + \frac{3}{7 \cdot 3^2} + \frac{3}{7 \cdot 4^2} + \ldots + \frac{3}{7 \cdot 2017^2} = \frac{3}{7}\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{2017^2}\right)$$

$(2p)$ Folosind punctul *a)*, obţinem

$$\frac{3}{7}\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{2017^2}\right) < \frac{3}{7}\left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{2016 \cdot 2017}\right).$$

$(1p)$ Deoarece $\dfrac{3}{7}\left(\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \dfrac{1}{2016 \cdot 2017}\right) = \dfrac{3}{7} \cdot \dfrac{2016}{2017} = \dfrac{864}{2017}$

$(1p)$ şi $\dfrac{864}{2017} < \dfrac{1}{2}$, obţinem inegalitatea din enunţ.

PROBLEMA 2. Fie paralelogramele $ABCD$ şi $CDEF$ situate în plane diferite astfel încât $DE = DA$, $AC = DF$ şi $AE \perp AB$. Ştiind că $EG \perp CD$, $G \in CD$, arătaţi că :

a) $AB \perp (AGE)$;

b) $G = D$.

Barem de corectare.

$(2p)$ *a)* Deoarece $EG \perp CD$ şi $DC \| AB \Rightarrow AB \perp EG$

$(1p)$ Deoarece ştim că $AB \perp AE \Rightarrow AB \perp (AGE)$

$(1p)$ *b)* $AB \perp (AGE)$ şi $DC \| AB \Rightarrow DC \perp (AGE)$

$(1p)$ $\Delta AGD \equiv \Delta EGD$ $(I.C.) \Rightarrow AG = GE$

$(1p)$ $\Delta AGC \equiv \Delta EGC$ $(C.C.) \Rightarrow AC = EC$

$(1p)$ Din $AC = EC$ şi $AC = DF$ rezultă $EC = DF \Rightarrow CDEF$ dreptunghi $\Rightarrow D = G$.

PROBLEMA 3. Fiecărui punct M din spaţiu i se asociază numărul real m şi fiecărui triunghi echilateral MNP din spaţiu i se asociază numărul real $m+n+p$. Fie cubul $ABCDEFGH$.

a) Să se arate că $BDEG$ este tetraedru regulat;

b) Aflaţi $a+c+d+h$, ştiind că $m+n+p=\sqrt{6}$ pentru orice triunghi echilateral MNP din spaţiu.

Barem de corectare.

(3*p*) *a*) Dacă $AB=\alpha$, atunci $BD=BG=BE=GE=GD=DE=\alpha\sqrt{2}$, adică $BDEG$ este un tetraedru regulat.

(1*p*) *b*) Deoarece $BDEG$ este tetraedru regulat,

$$b+d+e=b+d+g=b+e+g=d+e+g=\sqrt{6}$$

(1*p*) Deci $b=d=e=g=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

(1*p*) Analog pentru tetraedrul $ACFH$, $a=c=f=h=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

(1*p*) În concluzie $a+c+f+h=\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$

PROBLEMA 4. Într-un paralelipiped dreptunghic se află n pitici astfel încât măsurând distanţele dintre ei toate sunt diferite. La un moment dat, fiecare pitic sare pe locul piticului cel mai apropiat de el. Să se afle cel mai mare număr de pitici care pot fi în acelaşi loc după săritură, dacă în momentul săriturii toţi se află pe bază.

Barem de corectare.

(2*p*) Este posibil să fie 5 pitici în acelaşi loc deoarece putem considera pentagonul $P_1P_2P_3P_4P_5$ cu laturi diferite şi în interior punctul P astfel încât distanţa de la P la vârful P_i este mai mică decât laturile pentagonului care au o extremitate în P_i.

(1*p*) Dacă ar fi 6 pitici în P atunci $PP_1 < P_1P_2$ şi $PP_2 < P_1P_2$, $PP_2 < P_2P_3$ şi $PP_3 < P_2P_3$, ...

(2*p*) Deci în triunghiurile $P_1PP_2,\ P_2PP_3, ...$, laturile cu lungimea mai mare sunt $P_1P_2, P_2P_3, ...$, ca urmare cel mai mare unghi este $P_1PP_2,\ P_2PP_3, ...$

(2*p*) Rezultă $m(P_1PP_2) > 60^\circ,\ m(P_2PP_3) > 60^\circ$, ... Deci sunt 6 unghiuri cu măsura $> 60^\circ$ şi suma măsurilor lor este mai mare decât 360° ceea ce este imposibil.

[1]Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

[2]Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 25. 02. 2017

BAREM DE CORECTARE - Clasa a IX – a

PROBLEMA 1. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + 2$, $\forall\ n \geq 1$.

a) Să se demonstreze că $x_n = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n-1}}$, $\forall\ n \geq 1$.

b) Să se calculeze partea întreagă a numărului $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_{2017}$.

Barem de corectare.

(4p) *a*) Inducţie după n. Pentru $n = 1$, afirmaţia este adevărată. Dacă $x_n = 1 + (\frac{1}{2})^{2^{n-1}}$, pentru un $n \geq 1$, atunci

$$x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + 2 = 1 + (x_n - 1)^2 = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}$$

(2p) *b*) Dacă $a = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_{2017}$, atunci

$$\frac{1}{2} \cdot a = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) \cdot \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^4\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{2016}}\right) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{2017}}$$

(1p) Deci $a = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{2017}-1} \in (1, 2)$, şi $[a] = 1$.

PROBLEMA 2. Demonstraţi că:

a) dacă $a, b > 0$, atunci $\frac{1}{\sqrt{ab}} \leq \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b}$;

b) dacă $a, b, c > 0$ şi $a + b + c = 1$, atunci $\sqrt{\frac{bc}{a + bc}} + \sqrt{\frac{ac}{b + ac}} + \sqrt{\frac{ab}{c + ab}} \leq \frac{3}{2}$

Barem de corectare.

(3p) *a*) Din inegalitatea mediilor, avem: $\frac{1}{\sqrt{ab}} = \sqrt{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}} \leq \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2} = \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b}$;

(2p) *b*) Deoarece, $\sqrt{\frac{bc}{a + bc}} = \sqrt{\frac{bc}{1 - b - c + bc}} = \sqrt{\frac{bc}{(1 - b)(1 - c)}} = \sqrt{\frac{bc}{(a + b)(a + c)}}$, (1$p$) din inegalitatea mediilor, obţinem: $\sqrt{\dfrac{bc}{a+bc}} = \sqrt{\dfrac{b}{a+b} \cdot \dfrac{c}{a+c}} \leq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{b}{a+b} + \dfrac{c}{a+c}\right)$.

(1p) Aşadar,

$$\sqrt{\frac{bc}{a+bc}}+\sqrt{\frac{ac}{b+ac}}+\sqrt{\frac{ab}{c+ab}} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a+b}+\frac{c}{a+c}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+b}+\frac{c}{b+c}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+c}+\frac{b}{b+c}\right) = \frac{3}{2}.$$

PROBLEMA 3. Fie $ABCD$ un patrulater convex cu $AB > CD$, iar H_1 şi H_2 ortocentrele triunghiurilor ACD şi BCD. Să se demonstreze că dacă ABH_2H_1 este dreptunghi, atunci $ABCD$ este trapez isoscel.

Barem de corectare.

(3p) Deoarece H_1 este ortocentrul triunghiului ACD rezultă că $AH_1 \perp CD$, iar din faptul că ABH_2H_1 este dreptunghi rezultă că $AH_1 \perp AB$. Aşadar, $AB \parallel CD$, adică $ABCD$ este un trapez.

(1p) Fie O_1 şi O_2 centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor ACD şi BCD. Din

$$\overrightarrow{O_1H_1} = \overrightarrow{O_1A} + \overrightarrow{O_1C} + \overrightarrow{O_1D}, \overrightarrow{O_2H_2} = \overrightarrow{O_2B} + \overrightarrow{O_2C} + \overrightarrow{O_2D}$$

(2p) rezultă că $\overrightarrow{OH_1} = 2\overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OH_2} = 2\overrightarrow{O_2O} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$. Deci $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{H_1H_2} = \overrightarrow{OH_2} - \overrightarrow{OH_1} = 2\overrightarrow{O_2O_1} + \overrightarrow{AB}$, de unde $\overrightarrow{O_2O_1} = \overrightarrow{0}$, adică $O_2 = O_1$.

(1p) Deoarece $ABCD$ este un trapez inscriptibil, rezultă că $ABCD$ este trapez isoscel.

PROBLEMA 4. Fie D un punct fix pe mediana AA' a triunghiului ABC ($A' \in (BC)$). O dreaptă variabilă dusă prin D intersectează segmentele (AB) şi (AC) în M, respectiv în N. Dacă $MM' \parallel AC$, $NN' \parallel AB$, cu $M', N' \in (BC)$, să se arate că $\dfrac{1}{CM'} + \dfrac{1}{BN'}$ este constant.

Barem de corectare.

(2p) Dacă $MN \parallel BC$, din Teorema lui Thales, obţinem

$$\frac{1}{CM'} + \frac{1}{BN'} = \frac{AB}{AM \cdot BC} + \frac{AC}{AN \cdot BC} = \frac{1}{BC}\left(\frac{AB}{AM} + \frac{AC}{AN}\right)$$

adică $\dfrac{1}{CM'} + \dfrac{1}{BN'} = \dfrac{2}{BC} \cdot \dfrac{AA'}{AD}$;

(2p) Dacă $MN \nparallel BC$, fie $MN \cap BC = \{X\}$. Aplicăm teorema lui Menelaus triunghiurilor ABA' şi ACA', tăiate de dreapta MN şi obţinem:

$$\begin{cases} \dfrac{AM}{BM} \cdot \dfrac{XB}{XA'} \cdot \dfrac{A'D}{AD} = 1 \\ \dfrac{AD}{A'D} \cdot \dfrac{XA'}{XC} \cdot \dfrac{NC}{NA} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{CM'}{BM'} \cdot \dfrac{XB}{XA'} \cdot \dfrac{A'D}{AD} = 1 \\ \dfrac{AD}{A'D} \cdot \dfrac{XA'}{XC} \cdot \dfrac{N'C}{N'B} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{XB}{XA'} = \dfrac{AD}{A'D} \cdot \dfrac{BM'}{CM'} \\ \dfrac{XC}{XA'} = \dfrac{AD}{A'D} \cdot \dfrac{CN'}{BN'} \end{cases}$$

(2p) de unde, $\dfrac{XB + XC}{XA'} = \dfrac{AD}{A'D}\left(\dfrac{BC - CM'}{CM'} + \dfrac{BC - BN'}{BN'}\right)$. Dar $XB + XC = 2XA'$, şi astfel,

$$2 = \frac{AD}{A'D}\left(BC\left(\frac{1}{CM'} + \frac{1}{BN'}\right) - 2\right)$$

(1p) Aşadar, $\dfrac{1}{CM'} + \dfrac{1}{BN'} = \left(2\dfrac{A'D}{AD} + 2\right) \cdot \dfrac{1}{BC} \Rightarrow \dfrac{1}{CM'} + \dfrac{1}{BN'} = \dfrac{2}{BC} \cdot \dfrac{AA'}{AD}$.

[1]Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

[2]Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 25. 02. 2017

BAREM DE CORECTARE - Clasa a X – a

PROBLEMA 1. Fie $z \in \mathbb{C}$, astfel încât $z^2 - z\sqrt{2} + 1 = 0$. Calculaţi :

$a)$ $|z|$; $b)$ $\left|z^{2017} + \dfrac{1}{z^{2017}}\right|$.

Barem de corectare.

(3p) $a)$ Soluţiile ecuaţiei $z^2 - z\sqrt{2} + 1 = 0$ sunt $z_{1,2} = \dfrac{\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}}{2}$, deci $|z| = 1$.

(3p) $b)$ Deoarece $z^{2017} + \dfrac{1}{z^{2017}} = \sqrt{2}$,

(1p) obţinem $\left|z^{2017} + \dfrac{1}{z^{2017}}\right| = \sqrt{2}$.

PROBLEMA 2. Fie funcţia $f : \{1, 2, 3, ..., 2017\} \to \{1, 2, 3, ..., 2017\}$ astfel încât

$$(f \circ f)(x) + 2017x = 2018 \cdot f(x), \quad \forall\, x \in \{1, 2, 3, ..., 2017\}.$$

$a)$ Arătaţi că f este injectivă.

$b)$ Determinaţi funcţia f.

Barem de corectare.

(4p) $a)$ Dacă $a, b \in \{1, 2, 3, ..., 2017\}$ şi $f(a) = f(b)$, atunci

$$f(f(a)) = f(f(b)) \Rightarrow 2018 \cdot f(a) - 2017a = 2018 \cdot f(b) - 2017b \Rightarrow a = b.$$

Deci f este injectivă.

(1p) $b)$ Deoarece f este o funcţie injectivă de la o mulţime finită la ea însăşi, rezultă că f este bijectivă.

(1p) Dacă $a \in \{1, 2, 3, ..., 2017\}$ şi $b = f(a)$, atunci $f(f(a)) = f(b)$ şi

$$f(f(a)) + 2017a = 2018 \cdot f(a) \Rightarrow f(b) + 2017a = 2018 \cdot b \Rightarrow f(b) = 2017 \cdot (b - a) + b.$$

Deoarece $a, b, f(b) \in \{1, 2, 3, ..., 2017\}$, rezultă că $b - a = 0$.

(1p) Deci $f(x) = x, \quad \forall\, x \in \{1, 2, 3, ..., 2017\}$.

PROBLEMA 3. Fie funcţiile $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definite prin $f_1(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 18}$ şi $f_2(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 8}$. Aflaţi:

a) $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f_1(x) + \min\limits_{x\in\mathbb{R}} f_2(x)$;

b) $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} (f_1(x) + f_2(x))$.

Barem de corectare.

(4p) a) $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f_1(x) = 3$, $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f_2(x) = 2$, deci $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f_1(x) + \min\limits_{x\in\mathbb{R}} f_2(x) = 5$.

(1p) b) Fie $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$. Deoarece

$$f(x) = \sqrt{(x-3)^2 + (0-3)^2} + \sqrt{(x-2)^2 + (0-2)^2},$$

avem $f(x) = AC + BC$, unde A, B, C sunt 3 puncte din plan, cu coordonatele $A(3,3)$, $B(2,2)$, $C(x,0)$ în raport cu sistemul cartezian xOy.

(1p) Problema se reduce la determinarea unui punct C pe axa Ox astfel încât suma distanţelor de la C la A şi B să fie minimă.

Fie punctul $A'(3,-3)$. Deoarece $AC+BC = A'C+BC$, $f(x)$ are valoarea minimă atunci când punctele A', B şi C sunt coliniare.

(1p) Aşadar, $\min f(x) = A'B = \sqrt{26}$.

Observaţie: Se poate folosi asemănare de triunghiuri şi se obţine $x = \frac{12}{5}$, deci $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = f\left(\frac{12}{5}\right) = \sqrt{26}$.

PROBLEMA 4. Se consideră numerele naturale distincte $a_1, a_2, ..., a_{2017}$ mai mari decât 2. Să se arate că:

$$\log_{2017} 2 + \sum_{i=1}^{2017} \log_{2017}\left(1 - \frac{1}{a_i^2}\right) > 0$$

Barem de corectare.

(2p) Fără a restrânge generalitatea, putem presupune că $2 \le a_1 < a_2 < ... < a_{2017}$. Deci

$$a_i \ge 1 + i \Rightarrow a_i^2 \ge (1+i)^2 \Rightarrow \frac{1}{a_i^2} \le \frac{1}{(1+i)^2} \Rightarrow 1 - \frac{1}{a_i^2} \ge \frac{i(i+2)}{(1+i)^2},$$

pentru $i = 1, 2, ..., 2017$.

(3p) Ca urmare,

$$\log_{2017} 2 + \sum_{i=1}^{2017} \log_{2017}\left(1 - \frac{1}{a_i^2}\right) \ge \log_{2017} 2 + \log_{2017}\left(\frac{1\cdot 3}{2^2}\cdot\frac{2\cdot 4}{3^2}\cdot\frac{3\cdot 5}{4^2}\cdot ... \cdot\frac{2017\cdot 2019}{2018^2}\right) =$$

(2p) $= \log_{2017} 2 + \log_{2017}\frac{2019}{2\cdot 2018} = \log_{2017}\frac{2019}{2018} > 0.$

[1]Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

[2]Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 25. 02. 2017

BAREM DE CORECTARE - Clasa a XI – a

PROBLEMA 1. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(a_1\sqrt{x+1}+a_2\sqrt{x+2}+\ldots+a_{2017}\sqrt{x+2017}\right)$, unde $a_1,a_2,\ldots,a_{2017}\in\mathbb{R}$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right)$.

Barem de corectare.

a) Notăm limita cu L.

$(2p)$ Dacă $\sum\limits_{k=1}^{2017}a_k\neq 0$, atunci

$$L=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x}\cdot\left(\sum_{k=1}^{2017}a_k\sqrt{1+\frac{k}{x}}\right)\right)=\infty\cdot\sum_{k=1}^{2017}a_k=\begin{cases}-\infty, & \text{dacă } \sum\limits_{k=1}^{2017}a_k<0\\ +\infty, & \text{dacă } \sum\limits_{k=1}^{2017}a_k>0\end{cases},$$

$(2p)$ iar dacă $\sum\limits_{k=1}^{2017}a_k=0$, atunci $a_1=-\sum\limits_{k=2}^{2017}a_k$ şi

$$L=\lim_{x\to\infty}\sum_{k=2}^{2017}a_k\left(\sqrt{x+k}-\sqrt{x+1}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\sum_{k=2}^{2017}a_k\frac{a_2}{\sqrt{x+k}+\sqrt{x+1}}\right)=0$$

$(2p)$ *b)* Deoarece,

$$\left|\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right|=2\left|\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\right|\cdot\left|\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right|\leq 2\left|\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\right|$$

$(1p)$ şi $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\right)=0$, obţinem $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right)=0$.

PROBLEMA 2. Fie $A\in M_2(\mathbb{C})$. Arătaţi că dacă există $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$ astfel încât $A^n=O_2$, atunci $A^2=O_2$.

Barem de corectare.

$(2p)$ Din $A^n=O_2$, rezultă că $\det(A^n)=0$, adică $\det A=0$.

$(3p)$ Din $A^2-(\operatorname{tr}A)\cdot A+(\det A)\cdot I_2=O_2\Rightarrow A^2=t\cdot A\quad(t=\operatorname{tr}A)\Rightarrow A^n=t^{n-1}\cdot A$ (inducţie matematică).

$(1p)$ Cum $A^n=t^{n-1}\cdot A=O_2\Rightarrow\operatorname{tr}A=0$ sau $A=O_2$,

$(1p)$ de unde, $A^2=O_2$.

PROBLEMA 3. Se consideră şirul de numere reale $(a_n)_{n\geq 1}$, care, pentru orice $n \geq 1$, verifică proprietăţile:

(i) $a_n \geq 2$;

(ii) $a_{n+1} \leq a_n^2 - 4a_n + 6$;

(iii) $a_{n+1} + a_n^2 \leq 4a_n - \dfrac{3}{2}$.

Să se arate că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent şi să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Barem de corectare.

$(2p)$ Din $(iii) \Rightarrow a_{n+1} \leq \dfrac{5}{2} - (a_n - 2)^2 \leq \dfrac{5}{2}$, oricare ar fi $n \geq 1$. Aşadar, $a_n \in \left[2, \dfrac{5}{2}\right]$, adică şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este mărginit.

$(2p)$ Din $(ii) \Rightarrow a_{n+1} - a_n \leq a_n^2 - 5a_n + 6 = (a_n - 2)(a_n - 3) \leq 0$, adică şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este monoton descrescător

$(1p)$ Deci, din Teorema lui $Weierstras$, şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l \in \left[2, \dfrac{5}{2}\right]$.

$(2p)$ Trecând la limită în (ii), obţinem $l \leq l^2 - 4l + 6 \Rightarrow l^2 - 5l + 6 \geq 0 \Rightarrow l \in (-\infty; 2] \cup [3; +\infty) \Rightarrow l = 2$.

PROBLEMA 4. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cu proprietăţile:

$$\begin{array}{ll} (i) & f(x) + y = f(x + f(y)), \ \forall x, y \in \mathbb{R} \\ (ii) & \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 \end{array}$$

$a)$ Arătaţi că f este injectivă.

$b)$ Determinaţi toate funcţiile f cu proprietăţile (i) şi (ii).

Barem de corectare.

$(1p)$ $a)$ Din (i) avem:

$$\begin{aligned} f(f(x) + y) &= f(f(x + f(y))) \\ f(f(x) + y) &= f(y + f(x)) = f(y) + x = x + f(y) \end{aligned}$$

$(1p)$ Deci $(f \circ f)(x + f(y)) = x + f(y)$, de unde rezultă că $(f \circ f)(z) = z, \quad \forall\, z \in \mathbb{R}$.

Aşadar, $f \circ f = 1_{\mathbb{R}} \Rightarrow f$ este bijectivă $\Rightarrow f$ este injectivă.

$(2p)$ $b)$ Înlocuind în (i), y cu $f(y)$, obţinem $f(x) + f(y) = f(x + y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

Se notează $a = f(1)$ şi obţinem $f(x) = ax$, $\forall x \in \mathbb{Q}$, unde $a \in \{-1, 1\}$.

$(1p)$ Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, există un şir $(x_n)_{n\geq 0} \subseteq \mathbb{Q}$, astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

$(2p)$ Folosind (ii), avem:

$$f(x) = f(x - x_n + x_n) = f(x - x_n) + f(x_n) = f(x - x_n) + a \cdot x_n \to ax$$

Deci, $f(x) = ax$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

[1] Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

[2] Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 25. 02. 2017

BAREM DE CORECTARE - Clasa a XII – a

PROBLEMA 1. Să se calculeze integrala $I=\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\ln x}{x+1}\right)\cdot\cos(\ln(x+1))dx$.

(G.M. 9/2016)

Barem de corectare.

Dacă $I_1=\int\frac{1}{x^2}\cdot\cos(\ln(x+1))dx$ şi $I_2=\int\frac{\ln x}{x+1}\cos(\ln(x+1))dx$, atunci

(3p) $I_1=\int\left(-\frac{1}{x}\right)'\cdot\cos(\ln(x+1))dx=-\frac{1}{x}\cos(\ln(x+1))-\int\frac{1}{x(x+1)}\sin(\ln(x+1))dx$

$=-\frac{1}{x}\cos(\ln(x+1))-\int\frac{1}{x}\sin(\ln(x+1))dx+\int\frac{1}{(x+1)}\sin(\ln(x+1))dx$

$=-\frac{1}{x}\cos(\ln(x+1))-\int\frac{1}{x}\sin(\ln(x+1))dx-\cos(\ln(x+1))$,

(3p) iar $I_2=\int\ln x\cdot(\sin(\ln(x+1)))'dx=\ln x\cdot\sin(\ln(x+1))-\int\frac{1}{x}\sin(\ln(x+1))dx$.

(1p) Deci $I=I_1-I_2=-\frac{1}{x}\cos(\ln(x+1))-\cos(\ln(x+1))-\ln x\cdot\sin(\ln(x+1))+C$.

PROBLEMA 2. Să se demonstreze că în orice grup finit, numărul elementelor de ordin impar este impar.

(G.M. 10/2016)

Barem de corectare. Considerăm un grup finit G cu elementul neutru e şi notăm cu x' simetricul elementului $x\in G$.

(4p) Dacă $x\in G\setminus\{e\}$ este un element de ordin impar, atunci $x\neq x'$ şi $\operatorname{ord}(x)=\operatorname{ord}\left(x'\right)$. Aşadar, toate aceste elemente furnizează un număr par de elemente de ordin impar.

(2p) Deoarece $\operatorname{ord}(e)=1$,

(1p) numărul elementelor de ordin impar ale lui G este impar.

PROBLEMA 3. Fie $(K,\cdot)$ un grup cu patru elemente, unde $K=\{e,a,b,c\}$, e este elementul unitate şi $x^2=e$, pentru fiecare $x\in K$.

a) Alcătuiţi tabla operaţiei grupului $(K,\cdot)$;

b) Arătaţi că grupul $(K,\cdot)$ nu este izomorf cu grupul $(\mathbb{Z}_4,+)$;

c) Arătaţi că dacă G este un grup finit cu patru elemente, atunci G este izomorf sau cu K, sau cu $\mathbb{Z}_4$.

Barem de corectare.

(2p) Fie (x,y,z) o permutare a mulţimii $\{a,b,c\}$. Deoarece $(xy=x\Rightarrow y=e)$, $(xy=y\Rightarrow x=e)$ şi $(xy=e\Rightarrow x=y)$, obţinem că $xy=z$. Aşadar, tabla operaţiei grupului $(K,\cdot)$ este

$\cdot$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

(se observă că grupul $(K,\cdot)$ este abelian).

(2p) b) Dacă $f:(K,\cdot)\to(\mathbb{Z}_4,+)$ este un izomorfism de grupuri şi $f(x)=\widehat{1}$, unde $x\in K$, atunci $\widehat{0}=f(e)=f(x^2)=f(x\cdot x)=f(x)+f(x)=\widehat{1}+\widehat{1}=\widehat{2}$, ceea ce este absurd. Prin urmare, grupurile $(K,\cdot)$ şi $(\mathbb{Z}_4,+)$ nu sunt izomorfe.

c) Dacă G este un grup cu patru elemente, atunci $\operatorname{ord}(x)\in\{2,4\}$, pentru orice $x\in G\setminus\{e\}$.

(1p) Dacă există un element $x\in G\setminus\{e\}$ de ordin 4, atunci G este ciclic $(G=\langle x\rangle)$, adică $G\simeq\mathbb{Z}_4$.

(2p) Dacă G nu are niciun element de ordin 4, atunci $\operatorname{ord}(x)=2$, pentru orice $x\in G\setminus\{e\}$, de unde, obţinem că $G\simeq K$.

PROBLEMA 4. Să se arate că dacă funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ admite primitive, atunci şi funcţia $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=|x|\cdot f(x)$ admite primitive.

Barem de corectare.

(1p) Fie $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o primitivă a lui f. Deoarece F este derivabilă pe $\mathbb{R}$ rezultă că este continuă pe $\mathbb{R}$ deci admite primitive.

(4p) Fie H o primitivă a lui F pe $\mathbb{R}$. Funcţia

$$G:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad G(x)=\begin{cases}-x\cdot F(x)+H(x)-H(0), & x<0\\ x\cdot F(x)-H(x)+H(0), & x\ge 0\end{cases}$$

este o primitivă a lui g pe $\mathbb{R}$.

(2p) Într-adevăr, avem $G'(x)=g(x),\forall x\in\mathbb{R}^*$, $G'_s(0)=G'_d(0)=g(0)$, deci G este derivabilă şi în $x=0$ şi $G'(0)=g(0)$.

[1]Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

[2]Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.