OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 15.02.2014

Clasa a IX-a

Problema 1

a. Bizonyítsd be, hogy bármely a, b, c, x, y, z valós szám esetén fennáll az alábbi egyenlőtlenség:

$$(ax + by + cz)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2).$$

b. Határozd meg azokat az x, y, z valós számokat, amelyek igazolják az alábbi egyenlőséget:

$$3\sqrt{2y + z - 2} + 2\sqrt{10 - y - z} - \sqrt{x - y - z + 2} + \sqrt{4 - x + z} = 14 + \sqrt{z + y - x - 2}.$$

Problema 2

Minden n természetes számra meghatározzuk az alábbi halmazokat:

$$A_n = \{x \in R | x^2 + [x] \leq n\}, \quad B_n = \{x \in R | [x^2] + x \leq n\}.$$

Bizonyítsd be, hogy $A_n \subset B_{n+1}$ és $B_n \subset A_{n+1}$ bármely $n.$ esetén.

Problema 3

Adott az ABC háromszög és a D, E pontok, melyekre $13\overrightarrow{AB} + 7\overrightarrow{BD} + 3\overrightarrow{DC} = \vec{0}$ valamint $\overrightarrow{AE} + 3\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{CB}$.

a) Szerkesszük meg a háromszög síkjában a D és E pontokat.

b) Bizonyítsd be, hogy az A, D, E pontok kollineárisak.

Problema 4

Adottak az $1, 2, 3, \ldots, 1000.$ számok. Határozd meg azt a legnagyobb m számot, amelyre letörölve bármely m számot a megadott 1000 szám közül, a fennmaradt $1000 - m$ szám között létezik két olyan szám, amelyek közül az egyik osztója a másiknak.

Probleme selectate de Prof. Cicortas Marius

Notă: a) Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
b) Toate problemele sunt obligatorii.
c) Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.