OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 15.02.2014

Clasa a VII-a

Problema 1

Un număr natural se numește "*pătrat magic*" dacă el are exact trei divizori naturali.

a. Să se determine care dintre numerele 9, 10, 12, 25 sunt "*pătrate magice*".
b. Câte numere de trei cifre sunt "*pătrate magice*"?
c. Demonstrați că nu există două "*pătrate magice*" a căror sumă să fie un "*pătrat magic*".

Problema 2

Fie mulțimea $A = \left\{ \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}} \middle| n \in \boldsymbol{N}^* \right\}$.

a) Demonstrați că $\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$, oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}^*$.

b) Să se demonstreze că: $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{5}}{\sqrt{5^2+5}} + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{6}}{\sqrt{6^2+6}} + \cdots + \frac{\sqrt{2014}-\sqrt{2013}}{\sqrt{2013^2+2013}} = \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{2014}}$.

c) Să se demonstreze că există o submulțime *B* a lui *A* astfel încât suma elementelor din *B* să fie $\frac{1}{\sqrt{315}}$.

Problema 3

Fie *ABCD* un trapez cu *AB*||*CD*, *AB*>*CD*. Bisectoarea unghiului $\widehat{ABC}$, bisectoarea unghiului $\widehat{BCD}$ și *AD* sunt concurente în punctul *M*.

a) Demonstrați că triunghiul *MBC* este dreptunghic.

b) Demonstrați că *M* este mijlocul lui [*AD*].

c) Demonstrați că perpendiculara din *A* pe *MB*, perpendiculara din *D* pe *MC* și BC sunt concurente.

Problema 4

În triunghiul ascuțitunghic *ABC*, *D*$\in (BC)$. *E* și *F* sunt centrele de greutate ale triunghiurilor *ADB și ADC*. Demonstrați că $\Delta ABC \backsim \Delta DEF$ dacă și numai dacă *AD*⊥*BC*

Probleme selectate de Prof. Chisiu Gabriela

Notă: a) Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
b) Toate problemele sunt obligatorii.
c) Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.