



## OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 15.02.2014

Clasa a X-a

### Problema 1

Să se arate că dacă  $x_1, x_2, \dots, x_n \in (0, 1)$ , atunci

$$\log_{x_1} \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} + \log_{x_2} \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} + \dots + \log_{x_n} \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} \geq n.$$

### Problema 2

Fie  $a \in \mathbf{R}_+$  și  $z \in \mathbf{C}^*$ , astfel încât  $\left| z + \frac{1}{z} \right| = a$ . Să se afle cea mai mare și cea mai mică valoare posibilă a lui  $|z|$ .

### Problema 3

Să se calculeze partea întreagă a numărului  $\alpha = \log_2 3 + \log_3 5 + \log_5 8$ .

### Problema 4

Se consideră funcția  $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{x+3} - \sqrt{x-1}$ .

- Să se arate că  $\text{Im}f = (0, 2]$ .
- Să se studieze bijectivitatea funcției  $\bar{f}: [1, \infty) \rightarrow (0, 2]$ ,  $\bar{f}(x) = f(x)$ ,  $(\forall) x \geq 1$ .

Probleme selectate de Prof. Petruta Gelu

- Notă:** a) Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.  
b) Toate problemele sunt obligatorii.  
c) Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.