OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 15.02.2014

Clasa a XI-a

Barem de corectare

Problema 1

Șirul(x_n) n≥1 se mai poate scrie

$x_1 = 3$

$x_2 = x_1$+5

$x_3 = x_2$+7

$x_n = x_{n-1}$+2n+1

+

x_n=3+5+7+...+2n+1=$\sum_{k=1}^{n}(2k+1)$=n(n+2), n≥1 (2p)

Atunci $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_{2i-1}}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(2i-1)(2i+1)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2i-1}-\frac{1}{2i+1}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}++\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}$,n≥1 (2p)

Avem: $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\ln 2+\ln\frac{n}{2n+1}\right)=\lim_{n\to\infty} ln\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n=$ (1p)

$=\ln\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)^{-(2n+1)\frac{n}{-(2n+1)}}=\ln e^{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}$ (2p)

Problema 2

Se consideră $a_n=\sqrt{x_1^2-x_1x_2+x_2^2}+\sqrt{x_2^2-x_2x_3+x_3^2}+\cdots+\sqrt{x_n^2-x_nx_1+x_1^2}$, n≥3

Cum $\sqrt{x^2-xy+y^2}\leq\sqrt{(x+y)^2}$=x+y, ∀ x,y≥0 => (2p)

=>0≤$a_n\leq x_1+x_2+x_2+x_3+\cdots+x_n+x_1=2(x_1+x_2+\cdots+x_n)$ (2p)

Str. Mihai Eminescu nr. 11, 410019, Oradea
Tel: +40 (0) 259 41 64 54,
Tel./fax: +40 (0) 359 43 62 07,
Fax: +40 (0) 259 41 80 16,
+40 (0) 259 47 02 22,
Web: www.isjbihor.ro
E-mail: isjbihor@yahoo.com

Atunci $0 \leq \frac{a_n}{n} \leq \frac{2(x_1+x_2+...+x_n)}{n}$ (2p)

Cum $\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \xrightarrow{c.stolz} \lim_{n\to\infty} \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} = 0$ (1p) $= \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = 0$ (1p)

Problema 3

a) Demonstrarea relatiei (2p)

b) Relația A(A+B)B=B(A+B)A <=> $A^2B + AB^2 = BA^2 + B^2A$. (1p)

Din punctual a)

avem: $\begin{cases} A^2 = Tr(A)A - \det(A)I_2 \\ B^2 = Tr(B)B - \det(B)I_2 \end{cases}$ (1p) => $\begin{matrix} A^2B = Tr(A)AB - \det(A)B \\ AB^2 = Tr(B)AB - \det(B)A \end{matrix}$ (1p)

Prin adunarea relațiilor se obține:
$A^2B + AB^2 = Tr(A)AB - \det(A)\,B + +Tr(B)AB - \det(B)A$=[Tr(A)+Tr(B)]AB-det(A)B-det(B)A=-det(A)B-det(B)A (*) (1p)

Analog B$A^2 + B^2A = [Tr(A) + Tr(B)] - \det(A)\,B - \det(B)\,A = -\det(A)\,B - \det(B)A$ (**) (1p)

Din(*)(**) => A(A+B)B=B(A+B)A (1p)

Problema 4

Fie p(x)=det(A+xB)=a$x^2 + bx + c$, a,b,c ∈ **Q**

Din p($\sqrt{3}$)= det(A+$\sqrt{3}$B)=0 și p($\sqrt{3}$)=3a+$\sqrt{3}$b+c => 3a+c+$\sqrt{3}$b=0, a,b,c ∈ **Q=>**

=>b=0 și c=-3a (2p)

Avem p(x)=ax^2-3a. Cum p(0)=det(A)=-3 și p(0)=-3a => a=1 deci p(x)=x^2-3 (2p)

Fie ε o rădăcină cubică a unității, ε≠1.

(A+εB)(A+$\bar{\varepsilon}$B)=$A^2 + \bar{\varepsilon}AB + \bar{\varepsilon}BA + \varepsilon\bar{\varepsilon}B^2 = A^2 + B^2 + (\varepsilon + \bar{\varepsilon})AB = A^2 + B^2 - AB$. (2p)

det($A^2 + B^2 - AB$)=det[(A+εB)(A+$\bar{\varepsilon}$B)]=det(A+εB)det(A+$\bar{\varepsilon}$B)=p(ε)p($\bar{\varepsilon}$)=

=($\varepsilon^2 - 3$)($\bar{\varepsilon}^2 - 3$)= ($\varepsilon^2 - 3$)(ε-3)=$\varepsilon^3 - 3\varepsilon^2 - 3\varepsilon + 9$=

=$\varepsilon^3 - 3(\varepsilon^2$+ε)+9=1+3+9=13=> det($A^2 + B^2 - AB$)=13 (1p)

Notă: a) Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte.
b) Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.

Str. Mihai Eminescu nr. 11, 410019, Oradea

Tel: +40 (0) 259 41 64 54,
Tel./fax: +40 (0) 359 43 62 07,
Fax: +40 (0) 259 41 80 16,
+40 (0) 259 47 02 22,
Web: www.isjbihor.ro
E-mail: isjbihor@yahoo.com