OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 15.02.2014

Clasa a X-a

Barem de corectare

Problema 1

$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\dots+\frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \Rightarrow \log_{x_i} \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\dots+\frac{1}{x_n}} \geq \frac{1}{n} \log_{x_i}(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n)$, i=$\overline{1,n}$............3p

$\log_{x_1} \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\dots+\frac{1}{x_n}} + \dots + \log_{x_n} \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\dots+\frac{1}{x_n}} \geq \frac{1}{n}(\log_{x_1} x_1 + \log_{x_1} x_2 + \dots + \log_{x_n} x_n) \geq \frac{1}{n}(n + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2) = n$......4p

- S-a folosit inegalitatea $\log_a b + \log_b a \geq 2$, a,b $\in$ (0,1) .

Problema 2

$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$, $(\forall)$ $z_1, z_2 \in$ C..1p

$\left||z| - \left|\frac{1}{z}\right|\right| \leq \left|z + \frac{1}{z}\right| \leq |z| + \left|\frac{1}{z}\right|$..1p

$\left||z| - \frac{1}{|z|}\right| \leq a \Leftrightarrow -a \leq |z| - \frac{1}{|z|} \leq a \Leftrightarrow |z|^2 - a|z| - 1 \leq 0$ şi $|z|^2 + a|z| - 1 \geq 0$ (1)......1p

$a \leq |z| + \frac{1}{|z|} \Rightarrow |z|^2 - a|z| + 1 \geq 0$ (2)...1p

Rezolvând (1) şi (2) obţinem $|z| \geq \frac{\sqrt{a^2+4}-a}{2}$, respectiv $|z| \leq \frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}$..3p

Problema 3

$\alpha \geq 3\sqrt[3]{\log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 8} = 3\sqrt[3]{\log_2 8} = 3\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{81} \geq \sqrt[3]{64} = 4 \Rightarrow \alpha \geq 4$....................3p

$\log_2 3 < \log_2 4 = 2$, $\log_3 5 < \frac{3}{2}$, $\log_5 8 < \frac{3}{2}$ 3p

Obţinem $\alpha < 5$ şi $[\alpha] = 4$..1p

Problema 4

a) Se arată cã Imf=(0,2] prin dublã incluziune .

Se verificã 0 < f(x) $\leq$ 2, $(\forall) x \in [1, \infty)$...1p

De aici rezultã Imf $\subset$ (0,2]...1p

f(x)=y $\Leftrightarrow \sqrt{x+3} - \sqrt{x-1}$ = y $\Leftrightarrow$ x=$\frac{(y^2-2)^2+12}{4y^2}$ 1p

$x \geq 1 \Rightarrow (y^2-2)^2 + 12 \geq 4y^2 \Leftrightarrow (y^2-4)^2 \geq 0$

Str. Mihai Eminescu nr. 11, 410019, Oradea
Tel: +40 (0) 259 41 64 54,
Tel./fax: +40 (0) 359 43 62 07,
Fax: +40 (0) 259 41 80 16,
+40 (0) 259 47 02 22,
Web: www.isjbihor.ro
E-mail: isjbihor@yahoo.com

De aici rezultã (0,2] ⊂ Imf...1p

b) Evident $\bar{f}$ este surjectivã..1p

$\bar{f}(x) = \frac{4}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}}$...1p

Funcţia x→$\sqrt{x+3}$ +$\sqrt{x-1}$ este strict crescãtoare, iar funcţia x→$\frac{4}{x}$ este strict descrescãtoare pe (0,∞) şi în final funcţia $\bar{f}$ obţinutã prin compunerea acestora este strict descrescãtoare, adicã injectivã...1p

Notă: a) Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte.
b) Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.