OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ
11.02.2012

XII. OSZTÁLY

1. feladat. Tekintsük az f : $(0,\frac{\Pi}{2}) \to R$, f(x)=ln(tgx) függvényt. Ha az F: $(0,\frac{\Pi}{2}) \to R$ függvény az f függvény egy primitív függvénye, igazoljuk, hogy létezik $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} F(x) \in \boldsymbol{R}$.

2. feladat. Legyen $f:[0,1]\to R^*$ egy primitív függvénnyel rendelkező függvény. Igazoljuk, hogy f-nek nem létezik olyan F primitív függvénye, amelyre $F(x)=f(x)\cdot f(\frac{1-x}{1+x})$, $(\forall)\ x \in [0,1]$.

3. feladat. Legyen $(G,\cdot)$ egy csoport és f: G→G, $f(x)=x^2$ egy endomorfizmus. Igazoljuk, hogy a
$G_r=\{ x \in G \mid (\exists)\ n\in N$ a.î $x^{r^n}=e \}$, $r\in N$, a G csoport egy részcsoportja.

4. feladat. Legyen G=(-1;1) és a G-n értelmezzük a következő műveletet

$$x*y=\frac{x+y}{a+xy},\ a\in R$$

a) Határozzuk meg az $a\in R$ értékét úgy, hogy a $(G,*)$ Abel féle csoport legyen.

b) Ha a=1 igazoljuk, hogy az $f:(-1;1)\to (0,\infty)$, $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$ függvény egy csoportizomorfizmus, a $(G,*)$ és $(R_+^*,\cdot)$ csoportok között.

c) Ha a=1, számítsuk ki: $\frac{1}{7}*\frac{1}{17}*\ldots*\frac{1}{2n^2-1}$, $n\in N$, $n\geq 2$.

Megjegyzés:

- Minden tétel kötelező.
- Munkaidő 3 óra
- Minden feladatot 0−tól 7−ig , egész pontokkal pontoznak.