MINISTERUL EDUCAŢIEI, CERCETĂRII, TINERETULUI ŞI SPORTULUI

SOCIETATEA DE ŞTIINTE MATEMATICE

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN BIHOR

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ
11.02.2012

X. osztály

1. Igazoljátok, hogy a $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ szám racionális.

2. a) Határozzátok meg az $a \cdot b$ szorzat legnagyobb értékét tudva, hogy $\log_{\frac{1}{2}} a \cdot \log_{\frac{1}{2}} b = 1,\ a, b \in (0,1)$.

b) Ha a,b,c > 1, igazoljátok, hogy : $\left(\log_a \frac{b+c}{2}\right) \cdot \left(\log_b \frac{c+a}{2}\right) \cdot \left(\log_c \frac{a+b}{2}\right) \geq 1$.

3. Adott az $f: \boldsymbol{R} \to [2,\ \infty),\ \ f(x) = a^x + a^{-x}$ függvény ahol $a \in \boldsymbol{R}_+^* - \{1\}$.

a) Igazoljátok, hogy f szürjektí. Az f bijektív ?.

b) Igazoljátok, hogy adott $n \in \boldsymbol{N}^*$esetén $\sum_{k=1}^{n} f(kx) \geq 2n, \forall x \in \boldsymbol{R}$.

4. Legyen $z_1, z_2, z_3 \in \boldsymbol{C}$ cu $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ şi $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Igazoljátok, hogy:

a) $|z - z_1|^2 + |z - z_2|^2 + |z - z_3|^2 = 3 \cdot (1 + |z|^2), \forall z \in \boldsymbol{C}$.

b) $|z - z_1| + |z - z_2| + |z - z_3| \geq 3, \forall z \in \boldsymbol{C}$.

Megjegyzés:

- Minden tétel kötelező.
- Munkaidő 3 óra
- Minden feladatot 0−tól 7−ig , egész pontokkal pontoznak.