MINISTERUL EDUCAŢIEI, CERCETĂRII, TINERETULUI ŞI SPORTULUI

SOCIETATEA DE ŞTIINTE MATEMATICE

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN BIHOR

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ **ETAPA LOCALĂ 11.02.2012**

VIII. osztály

1. a) Legyen $a \epsilon \mathbb{Q}^*$. Igazold, hogy ha $a^{18} \epsilon \mathbb{Q}$ és $a^{11} \epsilon \mathbb{Q}$, akkor $a \epsilon \mathbb{Q}$.

   b) Igazold, hogy nem létezik $a, b, c, d \epsilon \mathbb{Q}$ úgy, hogy

   $1+\sqrt{3}=\left(a+b\sqrt{3}\right)^2+\left(c+d\sqrt{3}\right)^2$

2. Tudva, hogy $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ igazold az alábbi egyenlőtlenséget :

   $$(-a+b+c+d)^2+(a-b+c+d)^2+(a+b-c+d)^2+(a+b+c-d)^2+1 \geq 2(a+b+c+d)$$

   Milyen esetben áll fent az egyenlőség?

3. Adottak az A, B, C, D nem koplanáris pontok és legyenek M, N, P, Q az [AB], [BC], [CD], [DA] szakaszok felezőpontjai.
   a) Igazold, hogy az (APB), (CDM), (BCQ), (DAN) síkoknak van egy közös pontja.
   b) Ha MNPQ egy téglalap, akkor számítsd ki az AC és BD egyenesek által közrezárt szög mértékét.

4. Az ABCD négyzet síkjára, ugyanabban a féltérben, az FD és EB merőlegeseket emeljük. A négyzet oldalának hossza $2x$ (x>0), FD=x és EB=4x.

a) Határozzd meg az (ACE) és (ABC) síkok által meghatározott szög tangensét.

b) Igazold, hogy AE $\perp$ CF.

c) Számítsd ki az E pont távolságát az (ACF) síktól.

Megjegyzés:
- Minden tétel kötelező.
- Munkaidő 3 óra
- Minden feladatot 0–tól 7–ig , egész pontokkal pontoznak.