



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

etapa locală – 17 februarie 2018

CLASA a IX-a

Filiera teoretică – Profilul uman – specializarea Filologie, Științe Sociale

1. Se consideră următoarele mulțimi:  $A = \left\{x \in \mathbf{R} \mid \left| \frac{2x+1}{3} \right| \leq 5 \right\}$  și  $B = \{x \in \mathbf{N} \mid x^3 < 900\}$ .

a) (4p) Determinați mulțimile  $A$ ,  $B$ ,  $A \cap B$  și  $B \setminus A$ .

b) (3p) Arătați că numărul  $a = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{50}+\sqrt{51}} \in A$ .

a)  $A = [-8; 7]$  ..... 1p  
 $B = \{0,1,2, \dots, 9\}$  ..... 1p  
 $A \cap B = \{0,1,2, \dots, 7\}$  ..... 1p  
 $B \setminus A = \{8; 9\}$  ..... 1p

b) După raționalizare  $a = \sqrt{51} - 1$  ..... 2p

$7 < \sqrt{51} < 8$

$6 < \sqrt{51} - 1 < 7 \Rightarrow a \in A$  ..... 1p

2. Fie suma  $S_n = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n$ , unde  $n \in \mathbf{N}^*$ . Demonstrați că următoarele propoziții sunt adevărate:

a) (4p)  $p: S_{99} = 2^{100} - 1$ ;

b) (3p)  $q: S_{2017} \div 3$ .

a)  $S_{99} = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{99}$  ..... 1p

$1, 2, 2^2, \dots, 2^{99}$  sunt termenii unei progresii geometrice cu  $b_1 = 1$  și  $q = 2$  ..... 1p

Deci  $S_{99} = 2^{100} - 1$  ..... 2p

b)  $S_{2017} = 1 + 2 + 2^2 \dots + 2^{2017}$  ..... 1p

$S_{2017}$  are 2018 termeni care pot fi grupați astfel:

$S_{2017} = (1 + 2) + 2^2(1 + 2) + \dots + 2^{2016}(1 + 2)$  ..... 1p

$S_{2017} = 3(1 + 2^2 + 2^4 + \dots + 2^{2016})$  ..... 1p



3. O nouă librărie s-a deschis în oraș. În prima zi s-au vândut 7 cărți, după care, în fiecare zi s-au vândut cu 3 cărți mai mult decât în ziua precedentă.

- a) (2p) Aflați câte cărți s-au vândut în a șasea zi.  
b) (3p) Aflați câte cărți s-au vândut în primele 20 de zile.  
c) (2p) În a câta zi s-au vândut 250 de cărți?

- a) Avem o progresia aritmetică:  $(a_n)_{n \geq 1}$  cu  $a_1 = 7$  și  $r = 3$  ..... 1p  
În a șasea zi s-au vândut 22 de cărți ..... 1p  
b)  $a_{20} = a_1 + 19r \Rightarrow a_{20} = 64$  ..... 1p  
 $7 + 10 + 13 + \dots + 64 = \frac{(a_1 + a_{20}) \cdot 20}{2} = 710$  ..... 2p  
c)  $250 = 7 + 3(n - 1)$  ..... 1p  
 $n = 82$  ..... 1p

4. (7p) Fie dreptunghiul  $ABCD$  cu  $AB = 3 \text{ cm}$ ,  $BC = 2 \text{ cm}$  și punctul  $E$  astfel încât  $\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{BC}$ . Calculați modulul vectorului  $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BE}$ .

- C este mijlocul segmentului  $[BE]$  ..... 1p  
Atunci  $|\overrightarrow{BE}| = 4 \text{ cm}$  ..... 1p  
 $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BF}$ , unde  $F$  este astfel încât  $ABEF$  dreptunghi ..... 2p  
Astfel obținem  $|\overrightarrow{BF}| = 5 \text{ cm}$  ..... 3p