CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

Profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

Profilul real specializarea științele naturii

Profilul tehnic

Etapa locală, 17 februarie 2018
Clasa a XII-a

Subiectul 1 (7 puncte)

a) Să se rezolve ecuația $\hat{3}x+\hat{3}=\hat{0}$ cu coeficienți în $\mathbb{Z}_{12}$.
b) Pe $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție $x*y=2xy-6x-6y+21$.

Să se calculeze $\underbrace{x*x*\ldots*x}_{n-ori}$ unde $x\in\mathbb{R}$ și $n\in\mathbb{N}^*$.

Barem

a) $\hat{3}x=-\hat{3}\Rightarrow\hat{3}x=\hat{9}\Rightarrow x\in\{\hat{3},\hat{7},\widehat{11}\}$ **3p**
b) Aduce legea sub forma $x*y=2(x-3)(y-3)+3$ **1p**

$x*x=2(x-3)(x-3)+3=2(x-3)^2+3$

$x*x*x=[2(x-3)^2+3]*x=2\cdot[2(x-3)^2+3-3]\cdot(x-3)+3=2^2(x-3)^3+3$

Intuiesc $x*x*\ldots*x=2^{n-1}(x-3)^n+3$, dacă *x* este de *n* ori. **2p**

Demonstrez prin inducție propoziția P(n): $x*x*\ldots*x=2^{n-1}(x-3)^n+3$ **1p**

Subiectul 2 (7 puncte)

Fie $a\in\boldsymbol{R}, G=\left\{A(t)=\begin{pmatrix}1 & t & at^2+2t\\ 0 & 1 & 4t\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \mid t\in\boldsymbol{R}\right\}$.

a) Determinați numărul real a astfel încât G să fie parte stabilă a lui $M_3(\boldsymbol{R})$ în raport cu înmulțirea matricilor.
b) Pentru a=2 demonstrați că G este grup în raport cu înmulțirea matricilor.

Barem

a) Definiția părții stabile……………..……**1p**
Prin calcul direct se obține a=2………...**2p**
b) Se verifică axiomele grupului…………..**4p**

Subiectul 3 (7 puncte)

Să se calculeze:

a) $I = \int \frac{\sin x}{e^x+\sin x+\cos x} dx$ și $J = \int \frac{\cos x+e^x}{e^x+\sin x+\cos x} dx$, unde $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$;

b) $\int \frac{1}{e^x+a} dx$, $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$;

c) $\int \frac{2}{(e^x+1)(e^x+3)} dx$.

Barem

a) I+J=$\int dx = x + C$ **1p**

$J - I = \int \frac{\cos x+e^x-\sin x}{e^x+\sin x+\cos x} dx = \ln(e^x + \sin x + \cos x) + C$ **1p**

Rezolvă sistemul și obține:

$I = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\ln(e^x + \sin x + \cos x) + C$, $J = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\ln(e^x + \sin x + \cos x) + C$ **1p**

b) $\int \frac{1}{e^x+a} dx = \int \frac{1}{e^x(e^x+a)} \cdot e^x dx$. Facem substituția $e^x = t$, atunci $e^x dx = dt$.

$\int \frac{1}{t(t+a)} \cdot dt = \frac{1}{a}\int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+a}\right) dt = \frac{1}{a}\ln\left(\frac{t}{t+a}\right) + C$ **1p**

I= $\frac{1}{a}\ln\frac{e^x}{e^x+a} + C$ **1p**

c) $\int \frac{2}{(e^x+1)(e^x+3)} dx = \int \frac{(e^x+3)-(e^x+1)}{(e^x+1)(e^x+3)} dx =$ **1p**

$= \int \frac{1}{e^x+1} dx - \int \frac{1}{e^x+3} dx = \ln\frac{e^x}{e^x+1} - \frac{1}{3}\ln\frac{e^x}{e^x+3} + C$ **1p**

Subiectul 4 (7 puncte)

Se dă funcția $g: [1, e] \to \boldsymbol{R}$, $g(x) = ln^4 x$.

a) Determinați numerele a, b, c, d astfel încât funcția $G: [1, e] \to \boldsymbol{R}, G(x) = x(ln^4 x + aln^3 x + bln^2 x + clnx + d)$ să fie o primitivă a lui g.

b) Dacă $h: [1, e] \to \boldsymbol{R}, h(x) = \frac{g(x)}{x}$, găsiți primitiva H a funcției h care să aibă proprietatea $H(e^2) = \frac{2}{5}$.

Barem

a) G derivabilă pe $[1,e]$ și $G'(x) = g(x)$……………………………**1p**
$G'(x)$……………………………………………………………**2p**
a=-4, b=12, c=-24, d=24……………………………………...**1p**
b) Determinarea primitivelor H(x)……………………….…....**1p**
$H(e^2)$...**1p**
C= - 6 și finalizarea..**1p**

Adresa: Str. Mihai Eminescu, Nr. 11, 410019, Oradea
Tel: +40 (0) 259 41 64 54, **Tel./fax**: +40 (0) 359 43 62 07,
Fax: +40 (0) 259 41 80 16, +40 (0) 259 47 02 22,
Web: www.isjbihor.ro - **E-mail**: contact@isjbihor.ro