



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ “ADOLF HAIMOVICI”

Profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

Profilul real specializarea științele naturii

Profilul tehnic

Etapa locală, 17 februarie 2018 Clasa a XI-a

Subiectul 1 (7 puncte)

În $M_2(\mathbf{R})$ se consideră matricile $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2b & 2c \\ d-3 & c-1 \end{pmatrix}$.

- Determinați numerele reale a, b, c, d, știind că, în această ordine, sunt în progresie aritmetică și $AB=C$.
- Determinați A^{100} .

Barem:

- Din egalitatea $AB=C$ se obțin relațiile: $a+c=2b, b+d=2c, -a+c=d-3, -b+d=c-1$ **1p**
Prin calcul direct se obțin valorile $a=1, b=3, c=5$ și $d=7$ **2p**
- Se observă că $A^4 = -4I_2$ **2p** Deci $A^{100} = \begin{pmatrix} -4^{25} & 0 \\ 0 & -4^{25} \end{pmatrix}$ **2p**

Subiectul 2 (7 puncte)

În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele A(2,4), B(3,3), C(0,4).

- Scrieți ecuația dreptei AB;
- Aflați coordonatele punctului D, unde D este simetricul lui O față de dreapta AB;
- Aflați minimumul expresiei $OM+MC$ dacă M aparține dreptei AB.

Barem

- $AB : \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x + y - 6 = 0$ **1p**
- $m_{AB} = -1, m_{OD} = 1$
OD : $y - 0 = 1(x - 0) \Rightarrow y = x$ **1p**
 $AB \cap OD : \begin{cases} y = x \\ x + y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = 3$
Deci B(3,3) este mijlocul lui OD **1p**
D(6,6) **1p**
- $OM+MC=DM+CM, \min(OM + MC) = CD$ **1p**
 $CD = \sqrt{(6-0)^2 + (6-4)^2} = 2\sqrt{10}$ **1p**
desenul **1p**

Subiectul 3 (7 puncte)

Determinați numerele reale a, b astfel încât dreapta de ecuație $y = x-2$ să fie asimptotă spre $+\infty$ la graficul funcției $f: D \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \frac{x^3}{ax^2+bx+1}$. Pentru a și b determinate anterior, studiați dacă graficul funcției admite și asimptote verticale?

Barem:

Scrierea corectă a formulei asimptotei oblice1p

$a=1$ 2p

$b=2$ 2p

Dreapta de ecuație $x = -1$ este asimptotă verticală.....2p

Subiectul 4 (7 puncte)

a) Calculați $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+\sqrt{x+1}} - 2018 \cdot x)$

b) Calculați $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{2018 \cdot x + \sqrt{x+1}} - \sqrt{2018 \cdot x})$

Barem:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x+\sqrt{x+1}} - 2018 \cdot x = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} \left(\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}} - 2018 \cdot \sqrt{x} \right) = \dots\dots\dots 1p$

$\infty(1 - \infty) = -\infty \dots\dots\dots 2p$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{2018 \cdot x + \sqrt{x+1}} - \sqrt{2018 \cdot x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2018 \cdot x + \sqrt{x+1} - 2018 \cdot x}{\sqrt{2018 \cdot x + \sqrt{x+1}} + \sqrt{2018 \cdot x}} \dots\dots\dots 1p$

$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{2018 \cdot x + \sqrt{x+1}} + \sqrt{2018 \cdot x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{\sqrt{x} \left(\sqrt{2018 + \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}} + \sqrt{2018} \right)} = \dots\dots\dots 2p$

$= \frac{1}{2\sqrt{2018}} \dots\dots\dots 1p$