CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

Profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

Profilul real specializarea științele naturii

Profilul tehnic

Etapa locală, 17 februarie 2018
Clasa a X-a

Subiectul 1 (7 puncte)

Se consideră în mulţimea $\mathbb{C}$ ecuaţia $(z+2017i)^{2018}+i(z-2017i)^{2018}=0$.

a) Verificaţi dacă $z=2017$ este o soluţie a ecuaţiei.
b) Demonstraţi că, dacă z este o soluţie a ecuaţiei, atunci $|z+2017i|=|z-2017i|$.
c) Demonstraţi că orice soluţie a ecuaţiei este număr real.

Barem

a) Înlocuind $z=2017$ în ecuaţie se obţine $[2017(1+i)]^{2018}+i[2017(1-i)]^{2018}=0$
care, prin împărţire cu 2017^{2018}, este echivalent cu $(1+i)^{2018}+i(1-i)^{2018}=0$.........**1 p**
$\Leftrightarrow (2i)^{1009}+i(-2i)^{1009}=0$ ....**1 p**
$\Leftrightarrow (2i)^{1009}(1-i)=0$, ceea ce este fals.
Deci $z=2017$ nu este o soluţie a ecuaţiei ....**1 p**

b) $(z+2017i)^{2018}=-i(z-2017i)^{2018}$ ....**1 p**
$|z+2017i|^{2018}=|-i|\cdot|z-2017i|^{2018}$
Finalizare $|z+2017i|=|z-2017i|$ ....**1 p**

c) Înlocuind $z=x+yi$, unde $x,y\in\mathbb{R}$, în relaţia de la punctul b) se obţine
$|x+(y+2017)i|=|x+(y-2017)i|$ ....**1 p**
$\Longrightarrow x^2+(y+2017)^2=x^2+(y-2017)^2 \;\Longrightarrow y=0$
Finalizare $z=x\in\mathbb{R}$ ....**1 p**

Subiectul 2 (7 puncte)

Fie $M=\{lg1, lg2, lg3, \dots, lg1042\}$, unde lg x reprezintă logaritm zecimal din x.

a) Câte numere naturale conține mulțimea M ?

b) Câte elemente din mulțimea M aparțin intervalului $[1,2)$?

c) Demonstrați că suma elementelor mulțimii M este un număr mai mare ca 2019.

Barem

a) $M\cap\boldsymbol{N}=\{0,1,2,3\}$, adică mulțimea are 4 elemente. **2p**

b) Elementele: lg10, lg11, …,lg99 au partea întreagă = 1, deci 90 elemente ale mulțimii M aparțin intervalului $[1,2)$ **2p**

c) Elementele: lg1, lg2, …,lg9 au partea întreagă = 0. Elementele: lg10, lg11, …,lg99 au partea întreagă = 1. Elementele: lg100, lg101, …,lg999 au partea întreagă = 2. Elementele: lg1000, lg1001, …,lg1042 au partea întreagă = 3 ……………………………………………………………………….. **1p**

Suma elementelor mulțimii M este: $S \geq 0\cdot 9+1\cdot 90+2\cdot 900+3\cdot 43=2019$ ………………..…………**2p**

Subiectul 3 (7 puncte)

Să se arate că $\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}=1\cdot$

Barem

$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$..**3p**

$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}=\sqrt{2-\sqrt{3}}$..**2p**

$\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}=1$..**2p**

Subiectul 4 (7 puncte)

Să se determine parametrul real m astfel încât următorul logaritm să existe pentru orice numar real x:

$\lg\left[(5m-4)x^2-2(m+1)x+3m+1\right]$.

Barem

Se impun condiţiile $\begin{cases}\Delta<0\\5m-4>0\end{cases}$ ……………………………………………………………..**2p**

Calculul discriminantului şi obţinerea expresiei $-56m^2+36m+20<0$ …………………………...**1p**

Găsirea relaţiei $m\in\left(-\infty,-\frac{5}{14}\right)\cup(1,\infty)$ ………………………………………………………….**2p**

Rezolvarea celei de a doua condiţie , $m\in\left(\frac{4}{5},\infty\right)$ ……………………………………………...**1p**

Obţinerea rezultatului $m\in(1,\infty)$ ………………………………………………………………**1p**