



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

Profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

Profilul real specializarea științele naturii

Profilul tehnic

Faza locală, 25 februarie 2017

XII. Oszály

1. Tétel (7 pont)

Adott az $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ mátrix és a $G = \{X(m) | X(m) = I_2 + mA, m \in \mathbb{R}\}$ halmaz.

- Számítsátok ki az A^2 mátrixot.
- Igazoljátok, hogy $X(m) \cdot X(n) = X(m+n)$ bármely m és n valós számra.
- Igazoljátok, hogy bármely mátrix a G halmazból invertálható és az inverz mátrix szintén a G halmaz egy eleme.
- Ellenőrizték, hogy az $(X(m))^2 = O_2$ egyenletnek létezik-e megoldása!

2. Tétel (7 puncte)

Az \mathbb{R} halmazon értelmezzük a következő műveletet: $x * y = xy + ax + by + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$

- Határozzátok meg az a, b, c valós paramétereket úgy, hogy a művelet legyen kommutatív, asszociatív és $x * 2017 = 2017$ teljesüljön bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén.
- Az előző alpontban meghatározott a, b, c értékekre oldjátok meg \mathbb{R} -ben az $x * x * x = x$ egyenletet.

3. Tétel (7 pont)

Adottak a következő integrálok $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{3 \sin x + 4 \cos x} dx$ és $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{3 \sin x + 4 \cos x} dx$

- Számítsátok ki $(3 \sin x + 4 \cos x)'$.
- Mutassátok ki, hogy $3I + 4J = \frac{\pi}{2}$ és $3J - 4I = \ln \frac{3}{4}$.
- Határozzátok meg az I és J integrálokat.

4. Tétel (7 pont)

Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 6x - 2$ függvény.

- Határozzátok meg az f függvény azon primitív függvényeinek halmazát, amelyeknek nincs valós gyöke.
- Határozzátok meg a $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt úgy, hogy $g''(x) = f(x), g(1) = 0$ és $g(-1) = 4$.

Notă: Munkaidő 3 óra.

Minden tétel kötelező.