CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ “ADOLF HAIMOVICI”

Profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

Profilul real specializarea științele naturii

Profilul tehnic

Faza locală, 25 februarie 2017
Clasa a XII-a

Subiectul 1 (7 puncte)
Se dă matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ și mulțimea $G = \{X(m) | X(m) = I_2 + mA, m \in \mathbf{R}\}$.

a) Calculați A^2.
b) Arătați că $X(m) \cdot X(n) = X(m+n)$ pentru orice numere reale *m* și *n*.
c) Arătați că orice matrice din G este inversabilă și că inversa ei este tot o matrice din G.
d) Verificați dacă ecuația $\left(X(m)\right)^2 = O_2$ are soluții.

Subiectul 2 (7 puncte)

Pe **R** se definește legea de compoziție $x * y = xy + ax + by + c,\ a, b, c \in \mathbf{R}$.

a)Determinați parametrii reali *a*,*b*,*c* astfel încât legea dată să fie comutativă, asociativă și x ∗2017=2017 pentru orice $x \in \mathbf{R}$

b) Pentru *a*,*b*,*c* determinate la punctul anterior rezolvați în **R** ecuația $x * x * x = x$.

Subiectul 3 (7 puncte)
Se consideră integralele $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{3\sin x + 4\cos x} dx$ și $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{3\sin x + 4\cos x} dx$

a) Calculați $(3\sin x + 4\cos x)'$.
b) Arătați că $3I + 4J = \frac{\pi}{2}$ și $3J - 4I = \ln\frac{3}{4}$.
c) Determinați I și J.

Subiectul 4 (7 puncte)
Fie funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = 6x - 2$

a) Determinați mulțimea primitivelor lui f care nu au rădăcini reale.
b) Determinați funcția g: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ astfel încât $g''(x) = f(x), g(1) = 0$ și $g(-1) = 4$.

Notă: Timp de lucru 3 ore.
Toate subiectele sunt obligatorii.