MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA JUDEȚEANĂ
16 martie 2019

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Tehnologică : profilul Tehnic

Clasa a IX –a

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Problema 1. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

a) $|8x-3|=2x-1$.

b) $|3x-4|+|4x-5|+|7x|=x-2$.

BAREM:

a) Avem $2x-1\geq 0, x\geq\frac{1}{2}$ ……………………………………………………………………1p

$|8x-3|=8x-3$, deoarece $\frac{3}{8}<\frac{1}{2}$ ……………………………………………………………1p

Finalizare. Obține $x=\frac{1}{3}<\frac{1}{2}$, ecuația nu are soluții. ………………………………………1p

b) $x-2\geq 0,\ \ x\geq 2$ ………………………………………………………………………………1p

Deci $|3x-4|=3x-4,\ |4x-5|=4x-5$, $|7x|=7x$, deoarece $\frac{4}{3}<2,\ \frac{5}{4}<2,\ 0<2$ ……………1p

Finalizare, $x=\frac{7}{13}<2$, deci $S=\emptyset$. ……………………………………………………………1p

Problema 2.

a) Fie progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$, cu proprietatea că $a_{25}+a_{41}+a_{55}+a_{81}=1000$. Determinați suma primilor 100 de termeni.

b) Determinați un șir de numere naturale nenule $(a_n)_{n\geq 1}$, cu termenii în progresie aritmetică, știind că a_1, a_{14}, a_{29} sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

BAREM:

a) $a_{25}=a_1+24r$; $a_{41}=a_1+40r$; $a_{55}=a_1+54r$; $a_{81}=a_1+80r$ ……………………………1p

$4a_1+198r=1000 \Rightarrow 2a_1+99r=500$ ………………………………………………………1p

$S_{100}=\frac{(2a_1+99r)\cdot 100}{2}=500\cdot 50=25000$……………………………………………1p

b) $a_1(a_1+28r)=(a_1+13r)^2$, $a_1, r\in\mathbb{N}^*$………………………………………………1p

Se obține $2a_1=169r$, deci $a_1=169k$; $r=2k, k\in\mathbb{N}^*$. …………………………………2p

Finalizare, $a_n=(2n+167)k,\ n,k\in\mathbb{N}^*$…………………………………………………1p

Problema 3. Pe laturile $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$ ale triunghiului ABC se consideră punctele D, E, respectiv F, astfel încât $\frac{AD}{DB} = \frac{BE}{EC} = \frac{CF}{FA} = \frac{1}{7}$. Fie M, N, P sunt mijloacele laturilor $[DF]$, $[DE]$, $[EF]$ ale triunghiului DEF, se cere:

a) Demonstrați că $\overrightarrow{OD} = \frac{7}{8}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{8}\overrightarrow{OB}$.

b) Demonstrați că $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

c) Demonstrați că triunghiurile *ABC* si *MNP* au același centru de greutate.

BAREM:

a) Demonstrează că $\overrightarrow{OD} = \frac{7}{8}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{8}\overrightarrow{OB}$ 1p

b) Prin analogie $\overrightarrow{OE} = \frac{7}{8}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{8}\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OF} = \frac{7}{8}\overrightarrow{OC} + \frac{1}{8}\overrightarrow{OA}$ 1p

$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OF}\right) = \frac{8}{16}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{16}\overrightarrow{OB} + \frac{7}{16}\overrightarrow{OC}$ și analoagele

$\overrightarrow{ON} = \frac{7}{16}\overrightarrow{OA} + \frac{8}{16}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{16}\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{16}\overrightarrow{OA} + \frac{7}{16}\overrightarrow{OB} + \frac{8}{16}\overrightarrow{OC}$ 2p

Finalizare 1p

c) Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC, iar G' centrul de greutate al triunghiului MNP. Avem $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$, $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} = 3\overrightarrow{OG'}$.

Din a) rezultă $3\overrightarrow{OG} = 3\overrightarrow{OG'} \Rightarrow G = G'$ 2p

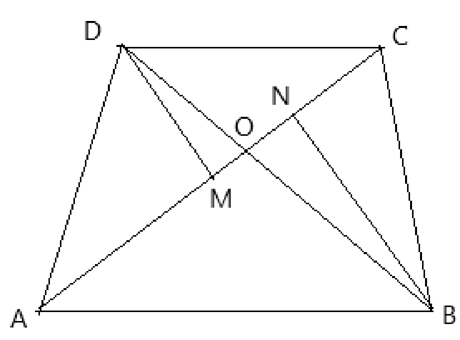
Problema 4. Se consideră o suprafață de teren sub formă de trapez isoscel $ABCD$ cu $AC \cap BD = \{O\}$, astfel încât $S_{[AOB]} = 16\ ha$ și $S_{[DOC]} = 9\ ha$. Suprafața de teren $ABCD$ se cultivă cu cartofi. Știm că în medie se obțin 25 tone la hectar , prețul de vânzare a unei tone de cartofi este de 2500 lei, iar profitul obținut pe tona de cartofi vândută este de 25% .

a) Demonstrați că $S_{[AOD]} \cdot S_{[COB]} = S_{[DOC]} \cdot S_{[AOB]}$.

b) Determinați producția obținută.

c) Ce profit se obține dacă se vinde 80% din producția obținută?

BAREM:



a) Fie $DM \perp AC$,$M \in AC$ și $BN \perp AC$,$N \in AC$.

$S_{[AOD]} \cdot S_{[COB]} = \frac{AO \cdot DM}{2} \cdot \frac{OC \cdot BN}{2}$ și $S_{[AOB]} \cdot S_{[COD]} = \frac{AO \cdot BN}{2} \cdot \frac{OC \cdot DM}{2}$

................................2p

b) $S_{[AOD]} = S_{[COB]}$; Folosește $S_{[AOD]} \cdot S_{[COB]} = S_{[DOC]} \cdot S_{[AOB]}$......1p

Finalizare, $S_{[ABCD]} = 49\ ha$, producția obținută este de 1225 t...1p

c) $\frac{80}{100} \cdot 1225 = 980$ tone. 1p

Finalizare. Profitul obținut este de 612500 lei. 2p

CONCURSUL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA JUDEȚEANĂ
16 martie 2019

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Tehnologică : profilul Tehnic

Clasa a X –a

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Problema 1. O navă zboară de pe Pământ spre planeta *X* aflată la 2^{20} km. După ce a străbătut un sfert din drum nava a pierdut contactul radio cu Pământul, acesta fiind restabilit în momentul în care nava se afla la 2^{19} km de planeta *X*. Câți kilometri a zburat naveta fără contact radio?

<u>BAREM</u>:

Determină distanța parcursă până se pierde contactul radio $2^{20}:2^2=2^{18}$ 2p
Formează ecuația $2^{18}+x+2^{19}=2^{20}$ 2p
Calculeză $2^{20}-2^{19}=2^{19}$ 2p
Finalizează $x=2^{19}-2^{18}=2^{18}$ km....................1p

Problema 2. a) Demonstrați că $\sqrt{19-6\sqrt{10}}=\sqrt{10}-3$.

b) Determinați $x\in\mathbb{R}$ astfel încât $\left(19-6\sqrt{10}\right)^x+\left(\sqrt{10}-3\right)^x\le 12$.

<u>BAREM</u>:

a) Calcul direct 2p
b) Notează $\left(\sqrt{10}-3\right)^x=t,\ \ t>0$ și obține inecuația $t^2+t-12\le 0$ 1p
Obține $0<t\le 3$....................2p
Justifică $\sqrt{10}-3\in(0,1)$ și din $\left(\sqrt{10}-3\right)^x\le 3\Rightarrow x\ge \log_{\sqrt{10}-3}3$....................2p

Problema 3. Se consideră numerele $a=\log_2\left(\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{2}\right)$ și $b=\log_2\left(\sqrt[3]{36}-\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{4}\right)$.

a) Calculați $a+b$.
b) Demonstrați că $b>0$.
c) Demonstrați că $a\cdot b\le\frac{9}{4}$.

<u>BAREM</u>:

a) $a+b=\log_2\left(\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{2}\right)\left(\sqrt[3]{36}-\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{4}\right)$ 1p
$a+b=\log_2 8=3$....................1p
b) $\sqrt[3]{36}>3,\ \ \sqrt[3]{4}>1,\ \ \sqrt[3]{12}<3\Rightarrow\sqrt[3]{36}-\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{4}>1\Rightarrow b>0$ 2p
c) Demonstrează că $a>0$ 1p
Cum $a,b>0\Rightarrow\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}$ 1p

$\sqrt{ab} \le \frac{3}{2} \Rightarrow a \cdot b \le \frac{9}{4}$ 1p

Problema 4. a) Fie $z_1, z_2 \in \mathbb{C}, z_1 = x + iy, z_2 = y + ix$ unde $x, y \in \mathbb{R}$. Știind că cele două numere complexe z_1 și z_2 au modulele egale cu 1, să se demonstreze că $z_1 \cdot z_2 = i$.

b) Radu trebuie să înmulțească 2019 numere complexe de modul 1. Din neatenție, el schimbă între ele partea reală cu partea imaginară la fiecare factor al produsului și astfel obține rezultatul final numărul $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$. Care trebuia să fie rezultatul corect al produsului celor 2019 numere complexe?

<u>BAREM</u>:

a) $z_1 \cdot z_2 = i\left(x^2 + y^2\right) = i$ 2p

b) Fie $z_k \in \mathbb{C}, \ |z_k| = 1, \ k = \overline{1, 2019}$ cele 2019 numere complexe

Conform a) $\Rightarrow \ -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} = \frac{i}{z_1} \cdot \frac{i}{z_2} \cdot ... \cdot \frac{i}{z_{2019}}$ 2p

$-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} = \frac{i^{2019}}{z_1 z_2 ... z_{2019}}$ 1p

$-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} = -\frac{i}{z_1 z_2 ... z_{2019}}$ 1p

Finalizare $z_1 z_2 ... z_{2019} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ 1p

Orice altă variantă corectă de rezolvare se punctează conform baremului.

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA JUDEȚEANĂ
16 martie 2019

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Tehnologică : profilul Tehnic

Clasa a XI –a

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Problema 1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} x^2-mx+1, & x<1 \\ \sqrt{x^2+3}-m, & x\geq 1 \end{cases}$,unde $m\in\mathbb{R}$.

a) Să se demonstreze că funcția este continuă pe $\mathbb{R}$, oricare ar fi numărul real m.

b) Să se demonstreze că ecuația $f(x)=0$ are o cel puțin o rădăcină în intervalul $\left(-1,\sqrt{6}\right)$, oricare ar fi $m\in(-\infty,-2)\cup(3,\infty)$.

BAREM:

a) Pentru $x\in(-\infty,1)\cup(1,\infty)$ funcția este continuă ca operații cu funcții continue……………………..........1p

Obține că $f(1)=l_s(1)=l_d(1)$, deci funcția este continuă pe $\mathbb{R}$ ……………………………..…..........2p

b) Obține $f(-1)=2+m$, $f(\sqrt{6})=3-m$ …………………………………………………………..........1p

Dacă $m\in(-\infty,-2)$, obține că $f(-1)<0,\ f\left(\sqrt{6}\right)>0$ ………………………………………….........1p

Dacă $m\in(3,\infty)$, obține că $f(-1)>0,\ f\left(\sqrt{6}\right)<0$ ……………………………………………........1p

Deoarece f este continuă și $f(-1)\cdot f\left(\sqrt{6}\right)<0$, rezultă că ecuația $f(x)=0$ are o cel puțin rădăcină în intervalul $\left(-1,\sqrt{6}\right)$ ………………………………………………………………………........1p

Problema 2. Se consideră mulțimea $M=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| a,b\in\mathbb{Q},\ a^2+b^2\leq 1\right\}$

a) Justificați că matricea $I_2\in M$.

b) Demonstrați că pentru orice matrice $X,Y\in M$ și produsul $X\cdot Y\in M$.

c) Demonstrați că dacă $A\in M$ este o matrice inversabilă având inversa A^{-1} tot din mulțimea M , atunci $\det(A)=\det\left(A^{-1}\right)$.

BAREM:

a) Pentru $a=1,b=0$, rezultă că $I_2\in M$ ……………………………………………………..................1p

b) Alege $X=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, $a,b\in\mathbb{Q}$, $a^2+b^2\le 1$ și $Y=\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}$, $c,d\in\mathbb{Q}$, $c^2+d^2\le 1$

Obține $X\cdot Y=\begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -ad-bc & ac-bd \end{pmatrix}$ 2p

Finalizare: deoarece $ac-bd\in\mathbb{Q}$, $ad+bc\in\mathbb{Q}$ și $(ac-bd)^2+(ad+bc)^2=(a^2+b^2)(c^2+d^2)\le 1$, rezultă că $X\cdot Y\in M$ 2p

c) Dacă $A\in M$ este o matrice inversabilă, atunci $0<\det(A)\le 1$

Atunci $A^{-1}\in M$ rezultă că $\det(A^{-1})\le 1$..1p

Pe de altă parte $\det(A^{-1})=\dfrac{1}{\det(A)}\ge 1$, deci $\det(A)=\det(A^{-1})=1$..1p

Problema 3. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^n+1}{x^2-1}$, $n\in\mathbb{N}$. Să se studieze existența asimptotelor funcției f. Discuție după valorile lui n.

BAREM:

Pentru $n=0$, rezultă că funcția admite $y=0$ asimptotă orizontală și $x=-1, x=1$ asimptote verticale…...1p
Pentru $n=1$, rezultă că funcția admite $y=0$ asimptotă orizontală și $x=1$ asimptotă verticală……………..1p
Pentru $n=2$, rezultă că funcția admite $y=1$ asimptotă orizontală și $x=-1, x=1$ asimptote verticale…....1p
Pentru $n=3$, rezultă că funcția admite $y=x$ asimptotă oblică și $x=1$ asimptotă verticală………………...2p
Pentru $n\ge 4$, n-nr par, rezultă că funcția admite numai $x=-1, x=1$ asimptote verticale…………………..1p
Pentru $n\ge 5$, n-nr impar, rezultă că funcția admite numai $x=1$ asimptotă verticală………………………...1p

Problema 4. a) Stabiliți câte matrice pătratice de ordinul trei verifică simultan condițiile :
i) au elementele numere naturale , ii) elementele de pe diagonala principală sunt egale cu 1,
iii) suma elementelor de pe orice linie sau coloană este egală cu 2019 .

b) Dacă $A=\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ b & 1 & a \\ a & b & 1 \end{pmatrix}$, $a,b\in\mathbb{N}$, $a+b=2018$ este o matrice de tipul anterior, deduceți că $a^3+b^3-3ab+1$ se divide cu 2019.

BAREM:

a) Considerând matrice de forma $A=\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ b & 1 & a \\ a & b & 1 \end{pmatrix}$ $a,b\in\mathbb{N}$, $a+b=2018$, constatăm că există 2019 perechi de numere naturale (a,b) cu , $a+b=2018$ si astfel vor exista 2019 matrice ……….........4p

c) Calculând în două moduri determinantul matricei $A=\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ b & 1 & a \\ a & b & 1 \end{pmatrix}$,obținem ca

$a^3+b^3-3ab+1=2019\cdot k$, $k\in\mathbb{N}$ 3p

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "*ADOLF HAIMOVICI*"

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA JUDEȚEANĂ
16 martie 2019

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Tehnologică : profilul Tehnic

Clasa a XII –a

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Problema 1. Se consideră mulțimea $M=\left\{\begin{pmatrix} x & 0 & 1-x \\ 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1-x \end{pmatrix} \middle| \ x\in\mathbb{R}\right\}$.

a) Demonstrați că mulțimea M este parte stabilă a mulțimii $M_3(\mathbb{R})$ în raport cu operația de înmulțire a matricelor.

b) Studiați proprietățile înmulțirii pe mulțimea dată.

BAREM:

a) Dacă $A(x)=\begin{pmatrix} x & 0 & 1-x \\ 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1-x \end{pmatrix}$ si $A(y)=\begin{pmatrix} y & 0 & 1-y \\ 0 & 1 & 0 \\ y & 0 & 1-y \end{pmatrix}$, $x,y\in\mathbb{R}$, atunci $A(x)\cdot A(y)=A(y)\in M$,

deci mulțimea M este parte stabilă a mulțimii $M_3(\mathbb{R})$ în raport cu operația de înmulțire a matricelor............3p

b) Inmulțirea matricelor este asociativă și cum M este parte stabilă, rezultă că și pe M va rămâne asociativă ……………………………………………………………………………………....................1p

Constatăm că $A(x)\cdot A(y)=A(y)$ si $A(y)\cdot A(x)=A(x)$, deci nu este operație comutativă…..................1p

Deoarece $A(x)\cdot A(e)=A(e), A(e)\cdot A(x)=A(x)$, rezultă că legea nu admite element neutru (în schimb are o infinitate de elemente neutre la stânga)………………………………………………………….............1p

Neexistând element neutru, desigur că nu există elemente simetrizabile în mulțimea M ………..................1p

Problema 2.

a) Demonstrați că funcția $F:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ F(x)=\ln x-\ln\sqrt{x^2+1}+2019$ este o primitivă crescătoare a funcției $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{x(x^2+1)}$.

b) Calculați $\int\dfrac{1}{x(x^6+1)}dx$, $x>0$ (se poate folosi , eventual , schimbarea de variabilă $t=x^3$).

BAREM:

a) Justifică $F-$derivabilă pe $(0,\infty)$, $F'(x)=f(x),(\forall)x>0$ ……………………….................……..........…2p

Deoarece $F'(x)=f(x)>0,(\forall)x>0$, rezultă că primitiva F este crescătoare……………………....................1p

b) Folosind schimbarea $t=x^3$, obține $\int \frac{1}{x\left(x^6+1\right)}dx=\frac{1}{3}\int \frac{1}{t\left(t^2+1\right)}dt$ 2p

Folosind punctul anterior obtine $\frac{1}{3}\int \frac{1}{t\left(t^2+1\right)}dt=\frac{1}{3}\left(\ln t-\ln \sqrt{t^2+1}\right)+C$ 1p

Finalizare $\int \frac{1}{x\left(x^6+1\right)}dx=\frac{1}{3}\left(\ln x^3-\ln \sqrt{x^6+1}\right)+C$ 1p

Obs: S-ar fi putut utiliza cu succes și schimbarea $t=x^6$.

Problema 3.

a) Verificați relația $x^3=x$, oricare ar fi $x\in\mathbb{Z}_6$.

b) Rezolvați în $(\mathbb{Z}_6,+,\cdot)$ ecuația $x^{2018}+\hat{2}\cdot x=\hat{0}$.

c) Determinați probabilitatea ca alegând două elemente *a* și *b* din $\mathbb{Z}_6$ suma lor să fie un element inversabil în $\mathbb{Z}_6$.

BAREM:

a) Verifică relația cerută 2p

b) Folosind punctul anterior, obține că $x^{2018}=x^2$ și ecuația devine $x^2+\hat{2}\cdot x=\hat{0}$

Obține soluțiile ecuației $x\in\left\{\hat{0},\hat{4}\right\}$ 2p

c) Elementele inversabile în $\mathbb{Z}_6$ sunt $\left\{\hat{1},\hat{5}\right\}$,iar ecuatiile $a+b=\hat{1}$, $a+b=\hat{5}$ au fiecare câte 6 soluții........................2p

Perechile (a,b) pot fi alese în 36 de moduri și probabilitatea căutată este egală cu $\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$ 1p

Problema 4. Într-un experiment s-a constatat că rata de memorare a cuvintelor din vocabularul unei limbi străine de către o grupă de studenți este dată de relația $M'(t)=0{,}15\cdot t-0{,}002\cdot t^2$, unde $M(t)$ reprezintă numărul de cuvinte memorate în **t** minute iar $M(0)=0$.

a) Integrând relația din enunț, deduceți $M(t)=\frac{3}{40}\cdot t^2-\frac{1}{1500}\cdot t^3$, oricare ar fi $t\geq 0$.

b) Estimați numărul de cuvinte memorate de către un student din acea grupă în 10 minute

BAREM:

a) Obține $\int M'(t)dt=\int\left(0{,}15\cdot t-0{,}002\cdot t^2\right)dt=\frac{3}{40}\cdot t^2-\frac{1}{1500}\cdot t^3$ 4p

b) Pentru t =10 , deduce $M(10)=\frac{3}{40}\cdot 100-\frac{1}{1500}\cdot 1000$ aproximativ 7 cuvine..3p