MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Teoretică : profilul Uman-Științe Sociale

Clasa a XII–a

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Problema 1.

Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a) Calculați $\det(A(-1))$.

b) Determinați numărul real x pentru care $A(x)\cdot A(-x)=I_2$, unde $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Calculați $\det(A(1)+A(2)+...+A(n))$.

Soluție:

a) $\det(A(-1))=0$. ……………………………………………**1 p**

b) $A(x)\cdot A(-x)=\begin{pmatrix} -x^2+1 & 0 \\ 0 & 1-x^2 \end{pmatrix}$ ……………………….. **1 p**

Din egalitatea $A(x)\cdot A(-x)=I_2$ rezultă $x=0$. ………………**1 p**

c) Fie $B=A(1)+A(2)+...+A(n)=\begin{pmatrix} 1+2+...+n & n \\ n & 1+2+...+n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{n(n+1)}{2} & n \\ n & \frac{n(n+1)}{2} \end{pmatrix}$. …**2p**

$\det(B)=\frac{n^2(n+1)^2}{4}-n^2=\frac{n^2}{4}\left[(n+1)^2-4\right]=\frac{n^2(n-1)(n+3)}{4}$. pentru orice n număr natural nenul ……………………………………………………………………...........**2 p**

Problema 2.

Se consideră matricele $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A=aI_3+bB+cB^2$, unde a, b, c sunt numere reale.

a)Să se calculeze B^2 și B^3.

b) Să se demonstreze că $(a+b+c)\det(A)\geq 0$, pentru orice a, b, c numere reale.

Soluție:

a) $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. ....**2 p**

$B^3 = I_3$. ....**1 p**

b) $\det(A) = (a+b+c)\cdot(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$. ....**2 p**

$(a+b+c)\cdot\det(A) = \frac{1}{2}\cdot(a+b+c)^2\cdot\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right] \geq 0$. ....**2 p**

Problema 3.

Pentru orice *n* număr întreg se consideră punctele $A_n(3n+1,\ 1-3n)$ și $B_n(2n-1,\ 4n-3)$.

a) Determinați aria triunghiului $A_0A_1B_2$.

b) Demonstrați că există *k, l* numere întregi astfel încât $A_k = B_l$.

Soluție:

a) $A_0(1{,}1)$, $A_1(4{,}-2)$, $B_2(3{,}5)$ ....**2 p**

Aria este egală cu 9. ....**1 p**

b) Avem: $3k + 1 = 2l - 1$, $1 - 3k = 4l - 3$ ....**2 p**

Rezultă $k = 0$, $l = 1$. ....**2 p**

Problema 4

Alin și Dan joacă urmatorul joc. Alin alege un număr *a*, apoi Dan alege un număr *x*. După aceasta, Alin alege un număr *b* și apoi Dan alege un număr *y*. Formăm matricea $M = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & b & x \\ y & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde *a, b, x, y* sunt numere reale.

Matricele de această formă, care au determinantul egal cu 1, se numesc matrice norocoasă. În acest caz, Alin câștigă jocul.

a) Cine câștigă jocul dacă $a = 1$, $b = -1$, $x = 0$, $y = -1$?

b) Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde *y* este număr real. Demonstrați că *A* este o matrice norocoasă.

c) Determinați valorile lui *a* și *b* care asigură victoria lui Alin, oricare ar fi alegerile făcute de Dan.

Soluție:

a) $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, det(*M*) = -1. ....**2 p**

Dan câștigă. ....**2 p**

b) Matricea *A* este de forma cerută. ($a = 0$, $b = 1$, $x = 0$, *y* este număr real) și det(*A*) = 1...........**1 p**

c) Dacă $M = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & b & x \\ y & 0 & 1 \end{pmatrix}$, det(*M*) = $b + axy$. ....**1 p**

Alin câștigă indiferent de alegerile lui Dan dacă $a = 0$, $b = 1$. ....**1 p**