MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Tehnologică : profilul Tehnic

Clasa a X –a

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Problema 1.

Se consideră numerele reale x şi y astfel încât $2^x = 3$ şi $3^y = 4$.

a) Demonstrați că $x \cdot y = 2$;

b) Demonstraţi că $x \in \left(\frac{3}{2}, \infty\right)$;

c) Demonstraţi că $y \in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$ şi deduceţi că $x > y$.

Soluție:

a) Obține $x = \log_2 3,\ y = \log_3 4$ ....1 punct

Obține $y = \dfrac{2}{\log_2 3}$ 1punct

Finalizare : $x \cdot y = 2$ .... 1 punct

b) $x > \frac{3}{2} \Leftrightarrow \log_2 3 > \log_2 2^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow 3 > \sqrt{8}$, adevărat..2 puncte

c) $y < \frac{3}{2} \Leftrightarrow \log_3 4 < \log_3 3^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow 4 < \sqrt{27}$ adevărat.. 1 punct

Finalizare $x > \frac{3}{2} > y$, deci $x > y$ ....1 punct

Problema 2.

a) Verificaţi egalitatea $a + a^2 + a^3 - 3 = (a-1)(a^2 + 2a + 3),\ \forall a \in \mathbb{R}$;

b) Rezolvaţi în R ecuaţia $2^x + 4^x + 8^x = 3$;

c) Să se rezolve ecuaţia $4\log_2 x + 8\log^2_4 x + 27\log_8^3 x = 24,\ x \in (0, \infty)$.

Soluție:

a) Verificarea egalității .... 1 punct

b) Notând $2^x = y$ Obține $y^3 + y^2 + y = 3$ ....1 punct

Din $y^3 + y^2 + y - 3 = 0 \Leftrightarrow (y-1)(y^2 + 2y + 3) = 0$ rezultă y=1.. 1 punct

Finalizare: x=0.. 1 punct

c) Aducând logaritmii în baza 2 obține $\left(\frac{\log_2 x}{2}\right)+\left(\frac{\log_2 x}{2}\right)^2+\left(\frac{\log_2 x}{2}\right)^3=3$ .... 1 punct

Dacă $y=\frac{\log_2 x}{2}$ rezulta $y+y^2+y^3=3$ .... 1 punct

Finalizare: $y=1$, deci $x=4$..1 punct

Problema 3.

Se consideră numărul complex $z=1+i\sqrt{3}+m\left(-1+i\sqrt{3}\right)$, unde $m\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

a) Demonstraţi că $|z|=2\sqrt{m^2+m+1}$;

b) Să se determine m astfel încât modulul numărului z să fie minim;

c) Dacă $z^3\in\mathbb{R}$, demonstraţi că $z^3=-8$.

Soluție:

a) Obține $z=1-m+i\sqrt{3}(1+m)$ .... 1 punct

Obține $|z|=2\sqrt{m^2+m+1}$ ....1 punct

b) Obține $|z|=2\sqrt{m^2+m+1}=2\sqrt{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\geq\sqrt{3},\forall m\in\mathbb{R}$ .... 1 punct

Finalizare : |z| este minim pentru $m=-\frac{1}{2}$ ....1 punct

c) Obține $z^3=(1-m)\left(-8m^2-20m-8\right)-12\sqrt{3}m(m+1)i$ ....1 punct

$z^3\in\mathbb{R}\Leftrightarrow m(1+m)=0$ ....1 punct

Convine numai $m=0$ și în acest caz $z^3=-8$ ....1 punct

Problema 4.

Doi fraţi au în proprietate comună un teren în forma trapezului *ABCD*. Ei hotărasc să împartă terenul în două părţi cu aceeaşi suprafaţă şi să le separe printr-un gard *MN*.

a) Justificaţi dacă punctele *M* şi *N* pot fi alese ca mijloace ale bazelor trapezului.

b) Justificaţi dacă punctele *M* şi *N* pot fi dispuse în altă poziţie pe cele doua baze?

Soluție:

a) Daca h- este înălțimea trapezului scrie $A=\frac{(B+b)h}{2}$ .... 1 punct

Obține $A_{AMND}=\frac{(AM+DN)h}{2}$ ....1 punct

Scrie $A_{AMND}=\frac{(AB+DC)h}{4}$ ....1 punct

Obține $A_{BMNC}=\frac{(BM+CN)h}{2}=\frac{(AB+CD)\cdot h}{4}$ ....1 punct

Finalizare: Punctele *M, N* pot fi alese ca mijloace ale bazelor .... 1 punct

b) Este necesară condiția $A_{AMND}=A_{BMNC}$ ....1 punct

Obținem $AM+DN=BM+CN\Leftrightarrow AM-BM=CN-DN$, deci nu exista alta dispunere a punctelor *M* si *N*...1 punct